Lista 1

03/04/2010

(1) Quantos elementos tem o anel $\mathbb{Z}[X]/(7, X^2 - 1)$?

(2) Diga se o anel $\mathbb{Q}[X]/(X^4 - 14X^2 + 7)$ é um domínio.

(3) Diga se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa. Todo domínio finito é um corpo.

(4) Diga se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa. Seja A um anel com unidade no qual $1 + 1 + 1 = 0$; então para $x \in A$ se $x + x = 0$ então $x = 0$.

(5) Sejam $p, q \in \mathbb{Z}/(p)[X]$. Mostre que $p(x) = q(x)$ para todo $x \in \mathbb{Z}/(p)$ se e somente se $(X^p - X)|(p - q)$.

(6) Exiba dois anéis com unidade não isomorfos de ordem 8.

(7) Exiba um polinômio irredutível de grau 2 em $(\mathbb{Z}/(13))[X]$ e use-o para construir um corpo com 169 elementos.

(8) Sejam $A_2 = ((\mathbb{Z}/(5))[X])/(X^2 - 2)$ e $A_4 = ((\mathbb{Z}/(5))[X])/(X^2 - 4)$. Diga se A_2 e A_4 são isomorfos.

(9) Sejam $A_2 = ((\mathbb{Z}/(5))[X])/(X^2 - 2)$ e $A_3 = ((\mathbb{Z}/(5))[X])/(X^2 - 3)$. Diga se A_2 e A_3 são isomorfos.

(10) Seja A um anel (provavelmente não comutativo) finito com unidade e com elementos $a, b \in A$ satisfazendo $ab = 1$. Prove que $ba = 1$. Diga se vale o mesmo para anéis infinitos.

(11) Diga se a afirmação a seguir é verdadeira ou falsa. Seja A um anel com unidade. Se $(ab - ba)^2 = 0$ para quaisquer elementos a e b de A então A é um anel comutativo.

(12) Sejam $A_d = ((\mathbb{Z}/(13))[X])/(X^2 - d)$ para $d = 1, 2, 3, \ldots, 12$. Diga quais destes anéis são domínios e quais são isomorfos.

(13) Seja $p \in \mathbb{Z}[X] \subseteq (\mathbb{Z}[i])[X]$ um polinômio de coeficientes inteiros de grau maior ou igual a 1. Diga se são verdadeiras ou falsas as afirmações:

(a) Se p é irredutível como elemento de $\mathbb{Z}[X]$ então é irredutível como elemento de $(\mathbb{Z}[i])[X]$.

(b) Se p é irredutível como elemento de $(\mathbb{Z}[i])[X]$ então é irredutível como elemento de $\mathbb{Z}[X]$.

(14) Seja $\pi : \mathbb{Z}[X] \to (\mathbb{Z}/(5))[X]$ o homomorfismo natural que toma cada coeficiente módulo 5. Seja $p \in \mathbb{Z}[X]$ um polinômio mônico de coeficientes inteiros e de grau maior ou igual a 1 (um polinômio é *mônico* se seu coeficiente de grau mais alto é 1). Diga se são verdadeiras ou falsas as afirmações:

(a) Se p é irredutível como elemento de $\mathbb{Z}[X]$ então $\pi(p)$ é irredutível como elemento de $(\mathbb{Z}/(5))[X]$.

(b) Se $\pi(p)$ é irredutível como elemento de $(\mathbb{Z}/(5))[X]$ então p é irredutível como elemento de $\mathbb{Z}[X]$.

(15) Diga quem são os elementos inversíveis de $\mathbb{C}[X,Y]/(XY-1)$.

(16) Seja a um inteiro. Mostre que se a equação

$$x^2 - 2y^2 = a$$

tem alguma solução inteira, então ela tem infinitas soluções inteiras. (Dica: considere o anel $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ e seus elementos inversíveis.)

(17) Mostre que para todo primo p da forma $6n+1$ existem inteiros a e b com $p = a^2 + 3b^2$. (Dica: considere o anel $\mathbb{Z}[\omega]$, $\omega = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$.)

(18) Seja $n > 0$ um inteiro. Mostre que as duas condições abaixo são equivalentes:

(a) n é da forma k^2 ou $2k^2$;

(b) o número de soluções da equação $x^2 + y^2 = n$ é côngruo a 4 módulo 8.

(19) Seja $p > 2$ um primo. Mostre que as duas condições abaixo são equivalentes:

(a) $p \equiv 1 \pmod 8$ ou $p \equiv 3 \pmod 8$;

(b) a equação $x^2 + 2y^2 = p$ admite solução inteira.

(20) Seja $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] = \{a + b\sqrt{-3}; a, b \in \mathbb{Z}\}$, com a soma e produto usuais. Mostre que $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ é um domínio onde não vale a fatoração única.

(21) Seja $C^0([0,1],\mathbb{R})$ o conjunto das funções contínuas de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$. Com a soma e produto usuais, mostre que $C^0([0,1],\mathbb{R})$ é um anel comutativo com unidade. Mostre que não existem elementos irredutíveis em $C^0([0,1],\mathbb{R})$. (Um elemento não nulo, não inversível a é dito *irredutível* se $a = bc$ implica que b ou c é inversível.)

(22) Encontre todos os ideais (bilaterais) do anel não comutativo das matrizes reais quadradas de ordem 2.

(23) Encontre todos os ideais de $\mathbb{C}[[X]]$, o anel das séries formais com coeficientes complexos.

(24) Faça uma lista completa (a menos de isomorfismo) de todos os anéis comutativos com unidade com 5 ou menos elementos.

(25) Seja $\hat{\mathbb{Z}}_7 = \mathbb{Z}[[X]]/(X-7)$. Mostre que $\hat{\mathbb{Z}}_7$ é um domínio e encontre todos os seus ideais primos. Diga se existe $x \in \hat{\mathbb{Z}}_7$ com $x^2 = 2$.

(26) Seja $A = \{2^n a; a, n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Q}$ o conjunto dos racionais diádicos. Mostre que A é um domínio principal e diga se A é euclidiano.

(27) Seja $\mathbb{Q}^+ = \mathbb{Q} \cap [0, +\infty)$. Sejam $A = \{a_1 X^{q_1} + \cdots + a_n X^{q_n}; a_i \in \mathbb{C}, q_i \in \mathbb{Q}^+\}$ e $B = \{a_1 X^{q_1} + \cdots + a_n X^{q_n}; a_i \in \mathbb{Q}, q_i \in \mathbb{Q}^+\}$ com as operações induzidas pela notação (assim, $X^q \cdot X^{q'} = X^{q+q'}$). Mostre que:
(a) A e B são domínios não noetherianos,
(b) não existem elementos irredutíveis em A,
(c) existem elementos irredutíveis em B,
(d) nem todo elemento de B é um produto de elementos irredutíveis.

(28) Seja $A = C^0((-1,1),\mathbb{R})$ o anel das funções contínuas de $(-1,1)$ em $\mathbb{R}$. Seja $I \subset A$ o conjunto das funções que se anulam em algum intervalo da forma $(-\epsilon, \epsilon)$, $\epsilon > 0$. Diga se o anel A/I é noetheriano.

(29) Seja A o conjunto de todas as funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Z}/(2)$ e seja $I \subset A$ o conjunto de todas as funções que são iguais a 1 apenas em um conjunto finito. Seja J um ideal maximal, $I \subset J \subset A$. Diga se A/J é isomorfo a $\mathbb{Z}/(2)$.

(30) Seja A o conjunto de todas as funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Q}$ e seja $I \subset A$ o conjunto de todas as funções que são diferentes de 0 apenas em um conjunto finito. Seja J um ideal maximal, $I \subset J \subset A$. Diga se A/J é isomorfo a $\mathbb{Q}$.

(31) Seja A um anel comutativo com unidade. Suponha que toda função de A em A é dada por um polinômio. Prove que A é um corpo finito.

(32) Defina recursivamente em $\mathbb{N}$ as seguintes operações: $a \oplus b$ é o menor natural que não pode ser escrito como $a' \oplus b$ ou $a \oplus b'$, $a' < a$, $b' < b$; $a \odot b$ é o menor natural que não pode ser escrito como $(a' \odot b') \oplus (a' \odot b) \oplus (a \odot b')$, $a' < a$, $b' < b$. Prove que com estas operações $\mathbb{N}$ é um corpo.

(33) Construa quatro anéis comutativos com unidade com 27 elementos (dois anéis isomorfos não contam, e você deve justificar que os exemplos não são isomorfos).

(34) Dê um exemplo de um domínio A no qual existam ideais primos I_1, I_2, I_3 com

$$\{0\} \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq I_3 \subsetneq A.$$

(35) Encontre todas as soluções inteiras da equação

$$x^2 + xy - y^2 = 1$$

com $|x|, |y| \leq 1000$ (dica: considere o anel $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$).

(36) Exiba polinômios não constantes $p, q, r \in \mathbb{C}[X]$ satisfazendo a equação

$$p^2 + q^2 = r^2.$$

Prove que não existem polinômios não constantes $p, q, r \in \mathbb{C}[X]$ satisfazendo a equação

$$p^3 + q^3 = r^3$$

(dica: suponha que (p_1, q_1, r_1) é uma solução de grau mínimo e use-a para obter outra solução (p_2, q_2, r_2) de grau mais baixo).