

Estruturas Algébricas I

20 de abril de 2010

A prova deve ser feita individualmente, com consulta livre.

Todas as questões têm o mesmo valor.

1. Encontre todos os polinômios mônicos e irredutíveis em $(\mathbb{Z}/(2))[X]$ de grau menor ou igual a 5.
2. Seja $D = \mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$.
 - (a) Dê um exemplo de um ideal $I \subset D$ que não seja principal.
 - (b) Diga se D é domínio fatorial.
3. Seja $A = \mathbb{Z}[X, Y]$ e $I \subset A$ o ideal $I = (2X - 1, 3Y - 5X)$. Diga se existe algum homomorfismo de anéis $\phi : A \rightarrow \mathbb{Q}$ com $\ker \phi = I$; se existir, diga quantos existem e dê um exemplo.
4. Seja $D \subset \mathbb{C}$ um domínio e $I \subset D$ um ideal. Definimos $I^2 \subset D$ como o menor ideal contendo todos os quadrados de elementos de I .
 - (a) Mostre que I^2 é conjunto de todos os elementos de D da forma $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$, $x_i, y_i \in I$.
 - (b) Diga se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa, com justificativa: para qualquer domínio D e para qualquer ideal $I \subset D$, $I \neq D$ temos $I^2 \subset I$, $I^2 \neq I$.