

# Estruturas Algébricas I

20 de abril de 2010

A prova deve ser feita individualmente, com consulta livre.

Todas as questões têm o mesmo valor.

1. Encontre todos os polinômios mônicos e irredutíveis em  $(\mathbb{Z}/(2))[X]$  de grau menor ou igual a 5.
2. Seja  $D = \mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$ .
  - (a) Dê um exemplo de um ideal  $I \subset D$  que não seja principal.
  - (b) Diga se  $D$  é domínio fatorial.
3. Seja  $A = \mathbb{Z}[X, Y]$  e  $I \subset A$  o ideal  $I = (2X - 1, 3Y - 5X)$ . Diga se existe algum homomorfismo de anéis  $\phi : A \rightarrow \mathbb{Q}$  com  $\ker \phi = I$ ; se existir, diga quantos existem e dê um exemplo.
4. Seja  $D \subset \mathbb{C}$  um domínio e  $I \subset D$  um ideal. Definimos  $I^2 \subset D$  como o menor ideal contendo todos os quadrados de elementos de  $I$ .
  - (a) Mostre que  $I^2$  é conjunto de todos os elementos de  $D$  da forma  $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$ ,  $x_i, y_i \in I$ .
  - (b) Diga se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa, com justificativa: para qualquer domínio  $D$  e para qualquer ideal  $I \subset D$ ,  $I \neq D$  temos  $I^2 \subset I$ ,  $I^2 \neq I$ .