

Estruturas Algébricas I

12 de abril de 2011

A prova deve ser feita individualmente, com consulta livre.
Todas as questões têm o mesmo valor.

1. Seja $D = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-23}}{2}]$.
 - (a) Dê um exemplo de um ideal $I \subset D$ que não seja principal.
 - (b) Diga se D é domínio fatorial.
2. Para $b \in \mathbb{Z}$, seja $D_b = (\mathbb{Z}/(11))[X]/(X^2 + bX + 1)$.
 - (a) Quais dentre os anéis D_0, D_1, D_2 e D_3 são domínios?
 - (b) Quais dentre os anéis D_0, D_1, D_2 e D_3 são isomorfos?
3. Seja $q = 2^p - 1$ um primo com $p > 2$, p primo. Prove que existem inteiros a e b com $q = a^2 - 2b^2$. (Exemplos: $p = 3$, $q = 2^3 - 1 = 7 = 3^2 - 2 \cdot 1^2$; $p = 5$, $q = 2^5 - 1 = 31 = 7^2 - 2 \cdot 3^2$.)
4. Seja $A = C^0([-1, 1], \mathbb{R})$ o anel das funções contínuas de $[-1, 1]$ em \mathbb{R} . Seja $I = [0, 1]$.
 - (a) Exiba uma família J_s , $s \in I$, de ideais principais satisfazendo

$$s_0 < s_1 \quad \Rightarrow \quad J_{s_0} \subset J_{s_1}, J_{s_0} \neq J_{s_1}.$$

- (b) Um ideal J é dito *radical* se $a^2 \in J$ implica $a \in J$ (para todo $a \in A$).
Exiba uma família \tilde{J}_s , $s \in I$, de ideais radicais satisfazendo

$$s_0 < s_1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{J}_{s_0} \subset \tilde{J}_{s_1}, \tilde{J}_{s_0} \neq \tilde{J}_{s_1}.$$

- (c) Existe algum ideal $J \subset A$ que seja principal e radical?