Estruturas Algébricas I

1 de junho de 2010

A prova deve ser feita individualmente, com consulta livre.
Todas as questões têm o mesmo valor.

1. Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa; justifique.
   (a) Seja G um grupo finito e H um subgrupo de G. Se para todo automorfismo $\phi : G \to G$ valer $\phi(H) = H$ então para todo homomorfismo $\phi : G \to G$ vale $\phi(H) \subseteq H$.
   (b) Seja G um grupo. Seja H o subgrupo de G gerado por todos os elementos de ordem 2. Então H é subgrupo normal de G.
   (c) Seja G um grupo. Seja H o subgrupo de G gerado por todos os elementos de ordem 2. Então todo elemento de H tem ordem 2^k para algum natural k.

2. Seja $X \subset \mathbb{R}^3$ o poliedro convexo de vértices

$$\begin{gathered}(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1),\\ (-1,-2,3),(-1,-3,2),(-2,-1,3),(-2,-3,1),(-3,-1,2),(-3,-2,1),\\ (-1,2,-3),(-1,3,-2),(-2,1,-3),(-2,3,-1),(-3,1,-2),(-3,2,-1),\\ (1,-2,-3),(1,-3,-2),(2,-1,-3),(2,-3,-1),(3,-1,-2),(3,-2,-1).\end{gathered}$$

   Seja $G \subset GL(3,\mathbb{R})$, $G = \{A \mid AX = X\}$, o grupo das simetrias de X.
   (a) Quantos elementos tem o grupo G?
   (b) É possível pintar (e possivelmente orientar) as arestas de X para obter um diagrama de Cayley? Como?
   (c) Diga se existem $g_1, g_2 \in G$ ambos de ordem 2 mas não conjugados.

3. Seja D_n o grupo diedral de $2n$ elementos gerado pelas matrizes

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & -\operatorname{sen}(2\pi/n) \\ \operatorname{sen}(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix}.$$

Responda as seguintes perguntas sobre D_n (divida em casos de acordo com o valor de n se necessário):

(a) Quantos elementos tem o centro de D_n?

(b) Quantos elementos tem o grupo $C(a) = \{g \in G \mid [a, g] = e\}$?

(c) Quantas classes de conjugação existem em G?

4. Seja $SL(2, \mathbb{Z}/(p))$ o grupo das matrizes 2×2 com coeficientes em $\mathbb{Z}/(p)$ e determinante igual a 1 onde p é um primo, $p > 2$. Para $A \in SL(2, \mathbb{Z}/(p))$, seja $p_A \in (\mathbb{Z}/(p))$ o polinômio característico de A:

$$p_A(x) = \det(xI - A).$$

(a) Mostre que se p_A tem duas raízes distintas em $\mathbb{Z}/(p)$ então $A^{(p-1)} = I$.

(b) Mostre que se p_A tem uma raiz dupla em $\mathbb{Z}/(p)$ então $A^{2p} = I$.