Estruturas Algébricas I

31 de maio de 2011

A prova deve ser feita individualmente, com consulta livre.
Todas as questões têm o mesmo valor.

1. Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa; justifique.

   (a) Seja G um grupo finito e H um subgrupo de G. Se para todo homomorfismo $\phi : G \to G$ valer $\phi(H) \subseteq H$ então H é subgrupo normal de G.

   (b) Seja G um grupo finito tal que todo elemento tem ordem 1, 2 ou 4. Seja H o subgrupo de G gerado por todos os elementos de ordem 2. Se $H \neq G$ então G é abeliano.

   (c) Seja $\mathcal{G}$ um grafo finito e conexo e seja G o grupo das simetrias de $\mathcal{G}$ (ou seja, os elementos de G são permutações dos vértices de $\mathcal{G}$ levando vértices adjacentes em vértices adjacentes). Suponha que dados dois vértices v_0, v_1 de $\mathcal{G}$ exista $g \in G$ com $g(v_0) = v_1$. Então existe um subgrupo H de G tal que dados dois vértices v_0, v_1 de $\mathcal{G}$ exista um *único* $g \in H$ com $g(v_0) = v_1$.

2. Para cada um dos grupos dados por geradores e relações abaixo, diga se o grupo é finito ou infinito. Se for finito, diga quantos elementos ele tem.

   (a) $\langle a, b \mid a^6 = b^2 = (ab)^3 = e \rangle$

   (b) $\langle a, b \mid a^{11} = b^3 = a^2\, b\, a^{10}\, b^2 = e \rangle$

   (c) $\langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^5 = (bc)^3 = (ac)^2 = e \rangle$

3. Seja A_8 o grupo das permutações pares de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
   (a) Quantas classes de conjugação existem em A_8?
   (b) Determine o número de elementos em cada classe de conjugação.
   (c) Dê um exemplo de um elemento de cada classe de conjugação.
   (d) Determine a ordem de cada um dos elementos de A_8 obtidos no item anterior.

4. Seja $G = GL(2, \mathbb{Z}/(p))$ o grupo das matrizes 2×2 inversíveis com coeficientes em $\mathbb{Z}/(p)$ onde p é um primo, $p > 2$. Seja $Z < G$ o centro de G (i.e., o subgrupo das matrizes $A \in G$ que comutam com toda $B \in G$).
   (a) Quantos elementos tem G?
   (b) Mostre que Z é subgrupo normal de G e determine o número de elementos de Z.
   (c) Fixando agora $p = 5$, seja $H = PGL(2, \mathbb{Z}/(5)) = G/Z$. Determine o número de elementos de H e quantos elementos H tem de cada ordem possível (e quais são estas ordens).