Estruturas Algébricas I

29 de junho de 2011

A prova deve ser feita individualmente, com consulta livre.
Todas as questões têm o mesmo valor.

1. Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa; justifique.
   (a) Sejam G e H grupos abelianos finitos com $|G|$ um múltiplo de $|H|$. Então existe um subgrupo $H_1 < G$, H_1 isomorfo a H.
   (b) Todo grupo finito de ordem $4199 = 13 \cdot 17 \cdot 19$ é cíclico.
   (c) Seja G um grupo de ordem $1144 = 2^3 \cdot 11 \cdot 13$. Então existe um elemento $g \in G$ de ordem $143 = 11 \cdot 13$.

2. (a) Quantos grupos abelianos não isomorfos de ordem 42 existem?
   (b) Exiba 5 grupos não abelianos não isomorfos de ordem 42.

3. Seja $G = GL(3, \mathbb{Z}/(2))$ o grupo simples das matrizes inversíveis 3×3 com coeficientes em $\mathbb{Z}/(2)$.
   (a) Mostre que G tem $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$ elementos.
   (b) Exiba um subgrupo $H_2 < G$ de ordem 8. Quantos subgrupos de ordem 8 existem?
   (c) Exiba um subgrupo $H_3 < G$ de ordem 3. Quantos subgrupos de ordem 3 existem?
   (d) Exiba um subgrupo $H_7 < G$ de ordem 7. Quantos subgrupos de ordem 7 existem?

4. Seja $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ o círculo munido de estrutura de grupo abeliano aditivo. Seja G um grupo abeliano de ordem $n > 1$. Seja $\hat{G}$ o conjunto dos homomorfismos $\omega : G \to \mathbb{S}^1$. Atribua a $\hat{G}$ uma estrutura de grupo abeliano aditivo: $(\omega_1 + \omega_2)(g) = (\omega_1(g)) + (\omega_2(g))$, $(-\omega)(g) = -(\omega(g))$, com a identidade sendo o homomorfismo constante igual a 0.
   (a) Verifique que $\hat{G}$ é um grupo abeliano e mostre que $|\hat{G}| = |G|$.
   (b) Determine se $\hat{G}$ é sempre isomorfo a G.
   (c) Sejam G e H grupos abelianos e seja $\phi : G \to H$ um homomorfismo. Defina $\hat{\phi} : \hat{H} \to \hat{G}$ por $\hat{\phi}(\omega) = \omega \circ \phi$ para $\omega : H \to \mathbb{S}^1$, $\omega \in \hat{H}$. Verifique que $\hat{\phi}$ é um homomorfismo.
   (d) Diga se cada uma das afirmações a seguir é verdadeira ou falsa, justificando:
   ϕ é injetor se e somente se $\hat{\phi}$ é sobrejetor;
   ϕ é sobrejetor se e somente se $\hat{\phi}$ é injetor.