Estruturas Algébricas I

20 de julho de 2010

A prova deve ser feita individualmente, com consulta livre.
Todas as questões têm o mesmo valor.

1. Seja $A = C^0((-1,1),\mathbb{R})$ o anel das funções contínuas de $(-1,1)$ em $\mathbb{R}$. Seja $I_0 \subset A$ o ideal de todas as funções $f \in A$ satisfazendo $f(0) = 0$. Seja $I_1 \subset A$ o ideal gerado por $f(x) = x$.
   (a) Diga se o ideal I_0 é maximal; descreva o quociente A/I_0.
   (b) Prove que $I_1 \subset I_0$, $I_1 \neq I_0$.
   (c) Construa ideais $I_{2^{-k}} \subset A$, $k \in \mathbb{N}$, com $I_{2^{-k}} \subset I_{2^{-k-1}}$, $I_{2^{-k}} \neq I_{2^{-k-1}}$.

2. Seja $A = \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.
   (a) Mostre que A é domínio principal.
   (b) O ideal (7) é irredutível? Descreva o quociente $A/(7)$.
   (c) O ideal (11) é irredutível? Descreva o quociente $A/(11)$.

3. Seja $G = SL(2,\mathbb{Z}/(5))$ o grupo de todas as matrizes 2×2 com coeficientes em $\mathbb{Z}/(5)$ e determinante igual a 1.
   (a) Calcule a ordem de G. Calcule $Z(G)$, o centro de G.
   (b) Exiba em G elementos de ordem 4, 6 e 10.
   (c) Quantos elementos de ordem 10 existem em G? Quais são eles?

4. Seja G dado por geradores e relações como abaixo:
$$G = \langle a,b,c | a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^3 = (ac)^2 = (bc)^4 = e\rangle.$$
   (a) Mostre que G é finito e calcule a sua ordem.
   (b) Faça um esboço de diagrama de Cayley de G.
   (c) Para cada primo p divisor da ordem de G exiba um p-subgrupo de Sylow de G.

5. Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa; justifique.
   (a) Seja $A = \mathbb{C}[X,Y]$ e $I \subset A$ um ideal.
   Se I é maximal então I é principal.
   (b) Seja G um grupo finito.
   Se $|Z(G)| > 1$ então $[G,G] \neq G$.
   (c) Seja G um grupo finito com $|G| = 7 \cdot 13^2 = 1183$.
   Então G é abeliano.