

**Estruturas Algébricas II**  
**Lista, 03/11/2010**

1. Seja  $\theta = 2\pi/13$ ; sejam

$$x_1 = 2(\cos(\theta) + \cos(3\theta) + \cos(4\theta));$$
$$x_2 = 2(\cos(2\theta) + \cos(5\theta) + \cos(6\theta)).$$

Mostre que  $x_1$  e  $x_2$  são raízes de um polinômio de grau 2 de coeficientes inteiros. Encontre este polinômio e expressões mais simples para  $x_1$  e  $x_2$ .

2. Seja  $\omega = \exp(2\pi i/3)$ ,  $\zeta = \exp(2\pi i/7)$ .

- (a) Calcule  $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\omega]$ ,  $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\zeta]$  e  $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\omega, \zeta]$ . Conclua que  $\omega \notin \mathbb{Q}[\zeta]$ .  
(b) Encontre explicitamente  $z \in \mathbb{Q}[\omega, \zeta]$  com  $z^3 \in \mathbb{Q}[\omega]$ ,  $z \notin \mathbb{Q}[\omega]$ .

3. Seja  $\zeta = \exp(2\pi i/19)$ ,  $K = \mathbb{Q}[\zeta]$ .

- (a) Calcule  $\dim_{\mathbb{Q}} K$  e descreva o grupo de Galois  $G_{\mathbb{Q} \subset K}$ .  
(b) Diga quantos subcorpos estão contidos em  $K$  e quais as suas  $\mathbb{Q}$ -dimensões. Para cada corpo diga se ele está contido em  $\mathbb{R}$ .

4. Diga se cada uma das construções abaixo pode ser feita com régua e compasso. Justifique.

- (a) Dividir um segmento  $AB$  dado em partes  $AC$  e  $CB$  que estejam na proporção  $AC/CB = \sqrt{2}$ .  
(b) Dividir um ângulo reto em 5 ângulos iguais.  
(c) Dividir um ângulo dado em 5 ângulos iguais.