Estruturas Algébricas II
Lista, 03/12/2010

1. Para cada um dos polinômios abaixo, seja $K \supset \mathbb{Q}$ o menor corpo contendo todas as raízes. Calcule o grupo de Galois da extensão $\mathbb{Q} \subset K$.
   (a) $X^3 - 2$
   (b) $X^3 + X^2 - 2X - 1$
   (c) $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$
   (d) $X^5 - 7$

2. Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique.
   (a) Sejam $K_0, K_1, K_2 \subset \mathbb{C}$ corpos de números algébricos com $K_1 \subset K_0$, $K_2 \subset K_0$, $\dim_{\mathbb{Q}} K_0 < \infty$, $\dim_{K_1} K_0 = \dim_{K_2} K_0 = 2$. Então $\dim_{K_1 \cap K_2} K_0 \leq 4$.
   (b) Se as extensões $K_1 \subset K_2$ e $K_2 \subset K_3$ são normais então a extensão $K_1 \subset K_3$ também é normal.
   (c) Seja $P \in \mathbb{Z}[X]$ irredutível. Seja $n = \text{grau}(P)$ e $m = \dim_{\mathbb{Q}} K$ onde K é o menor corpo contendo todas as raízes de P. Então $m = n!$.
   (d) Seja $P \in \mathbb{Z}[X]$ irredutível. Seja $n = \text{grau}(P)$ e $m = \dim_{\mathbb{Q}} K$ onde K é o menor corpo contendo todas as raízes de P. Então $n|m$.
   (e) Seja $P \in \mathbb{Z}[X]$ irredutível. Seja $n = \text{grau}(P)$ e $m = \dim_{\mathbb{Q}} K$ onde K é o menor corpo contendo todas as raízes de P. Então $m|n!$.
   (f) Seja $P \in \mathbb{Z}[X]$ irredutível. Seja $n = \text{grau}(P)$ e G o grupo de Galois da extensão $\mathbb{Q} \subset K$ onde K é o menor corpo contendo todas as raízes de P. Então existe em G pelo menos um elemento de ordem n.