Estruturas Algébricas II

30 de setembro de 2010

A prova deve ser feita individualmente, com consulta livre.
Todas as questões têm o mesmo valor.

1. Seja G o grupo não abeliano com 55 elementos dado pelas funções da forma

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}/(11) &\to \mathbb{Z}/(11) \\ x &\mapsto cx + d \end{aligned}$$

   com $c \in \{1, -2, 3, 4, 5\} \subset \mathbb{Z}/(11)$ e $d \in \mathbb{Z}/(11)$. Note que G é gerado por a e b onde $a(x) = x + 1$, $b(x) = 3x$.

   (a) Determine quantas e quais são as classes de conjugação dentro de G. Dê explicitamente um elemento de cada classe e diga quantos elementos a classe tem.

   (b) Escreva a tabela de caracteres de G.

2. Um icosaedro regular tem 30 arestas em 15 pares de arestas opostas. O grupo A_5 das simetrias do icosaedro (e das permutações pares de 5 elementos) age por permutações neste conjunto de 15 pares e esta ação induz um homomorfismo $\phi : A_5 \to GL(\mathbb{C}^{15})$.

   (a) Calcule o caractere χ da representação ϕ.

   (b) Determine a decomposição de χ como soma de caracteres irredutíveis.

3. Seja $A = (\mathbb{Z}/(2))[X]$ e considere $M_1 \subseteq A^3$ gerado por

$$\begin{gathered} \left(X^2 + X + 1, X^3 + 1, X^4 + X^3 + X + 1\right), \\ \left(X^3 + X^2 + X, X^4 + 1, X^5 + X^4 + X + 1\right), \\ \left(X^3 + X^2 + X, X^4 + X^3 + X^2 + X, X^5 + X + 1\right). \end{gathered}$$

   Seja $M = A^3/M_1$.

   (a) Quantos elementos tem o módulo M?

   (b) Escreva M como isomorfo a uma soma direta de submódulos irredutíveis.

4. Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa; justifique.
   (a) Seja D um domínio noetheriano mas não principal. Então existe um D-módulo M finitamente gerado que não pode ser escrito como soma direta de submódulos isomorfos a D ou a $D/(p^e)$ com $p \in D$ irredutível e $e \in \mathbb{N}$.
   (b) Seja G um grupo finito e χ o caractere de uma representação irredutível de G. Seja $g \in G$ com $g^2 = e$. Então $\chi(g) \in \mathbb{Z}$ com $|\chi(g)| \leq \chi(e)$ e $\chi(g) \equiv \chi(e) \pmod 2$.
   (c) Seja G um grupo finito e $\chi : G \to \mathbb{C}$ o caractere de uma representação irredutível de G. Seja $g_0, g_1 \in G$ e $\alpha : G \to G$ um automorfismo com $\alpha^2(g) = g$ (para todo $g \in G$) e $\alpha(g_0) = g_1$. Se $\chi(g_0) = z_0$ e $\chi(g_1) = z_1$ então existe um caractere irredutível $\tilde{\chi}$ com $\tilde{\chi}(g_0) = z_1$ e $\tilde{\chi}(g_1) = z_0$.