Estruturas Algébricas II

9 de novembro de 2010

A prova deve ser feita individualmente, com consulta livre.
Todas as questões têm o mesmo valor.

1. Seja $\theta = 2\pi/13$; seja
$$a = 2\left(\operatorname{sen}(\theta) + \operatorname{sen}(3\theta) - \operatorname{sen}(4\theta)\right).$$
Simplifique a. Encontre um polinômio irredutível $P \in \mathbb{Z}[X]$ com $P(a) = 0$ e calcule suas raízes.

2. Seja $b = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.
   (a) Calcule $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[b]$.
   (b) Para um inteiro positivo n, seja
   $$\zeta_n = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right); \quad K_n = \mathbb{Q}[\zeta_n].$$
   Mostre que existe n com $b \in K_n$ e determine o menor tal n.

3. Sejam $x_0 = 2\cos(2\pi/7)$, $x_1 = 2\cos(4\pi/7)$, $x_2 = 2\cos(6\pi/7)$ e $\omega = \exp(2\pi i/3)$. Sejam $z_0 = x_0 + \omega x_1 + \omega^2 x_2$, $z_1 = x_0 + \omega^2 x_1 + \omega x_2$.
   (a) Simplifique z_0^3 e z_1^3.
   (b) Escreva x_0 em função de z_0 e z_1.

4. Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa; justifique.
   (a) Seja $P \in \mathbb{Q}[X]$ um polinômio irredutível de grau 3; sejam $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ suas raízes. Então $z_2 \notin \mathbb{Q}[z_1]$.
   (b) Seja $P \in \mathbb{Q}[X]$ um polinômio irredutível de grau 3; sejam $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ suas raízes. Então $z_2 \in \mathbb{Q}[z_1]$.
   (c) Sejam $K_1 \subset K_2$ corpos de característica $p > 0$. Seja $P \in K_1[X]$ um polinômio irredutível em $K_1[X]$ com $\operatorname{grau}(P) = n < p$. Suponha que em $K_2[X]$ o polinômio P possa ser escrito como um produto de polinômios de grau 1. Então P tem n raízes distintas em K_2.