Estruturas Algébricas II

7 de dezembro de 2010

A prova deve ser feita individualmente, com consulta livre.
Todas as questões têm o mesmo valor.

1. Dê um exemplo de um polinômio irredutível $P \in \mathbb{Z}[X]$ tal que o grupo de Galois da extensão $\mathbb{Q} \subset K$ seja isomorfo a $\mathbb{Z}/(11)$, onde $K \supset \mathbb{Q}$ é o menor corpo contendo todas as raízes de P.

2. Mostre que existe um polinômio irredutível $P \in \mathbb{Z}[X]$ de grau 7 tal que o grupo de Galois da extensão $\mathbb{Q} \subset K$ seja isomorfo ao grupo simétrico S_7, onde $K \supset \mathbb{Q}$ é o menor corpo contendo todas as raízes de P.

3. Seja K a menor extensão normal de $\mathbb{Q}$ com $\sqrt{3+\sqrt{2}} \in K$.
   (a) Calcule $\dim_{\mathbb{Q}} K$.
   (b) Descreva o grupo de Galois $G_{\mathbb{Q} \subset K}$.
   (c) Diga quais são todos os subcorpos de K.

4. Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa; justifique.
   (a) Seja $P \in \mathbb{Q}[X]$ um polinômio irredutível de grau 5 com 5 raízes reais $z_1, \ldots, z_5$. Então nenhum z_i pode ser expresso com radicais (a partir dos inteiros).
   (b) Para todo grupo finito G_0 existem corpos $K \subset L$ de característica 0 tal que a extensão $K \subset L$ é finita e normal e o grupo de Galois $G_{K \subset L}$ é isomorfo a G_0.