P1 de Álgebra Linear (turma especial)
MAT 1200 — 2010.1
Data: 16 de abril de 2010

Nome: GABARITO ______________________________ Matrícula: ____________
Assinatura: ______________________________ Turma: ____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	2.5		
2a	1.0		
2b	1.0		
3	2.5		
4a	1.0		
4b	1.0		
4c	1.0		
Prova	10.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou preta.
  Não use caneta vermelha ou verde.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Considere o sistema linear 3×3:

$$\begin{cases} 3333x + 3333y + 3333z = a, \\ 6666x + 6667y + 6668z = b, \\ 9999x + 10000y + 10002z = c, \end{cases}$$

onde a, b e c são constantes.

Determine todos os valores de a, b e c para os quais o sistema admite uma única solução e encontre esta solução em função de a, b e c.

Solução:

Escalonando, o sistema acima é equivalente a:

$$\begin{cases} 3333x + 3333y + 3333z & = a, \\ \qquad\quad y + 2z & = b - 2a, \\ \qquad\quad y + 3z & = c - 3a, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z & = a/3333, \\ \quad y + 2z & = b - 2a, \\ \qquad\ z & = (c - 3a) - (b - 2a) = c - b - a, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y & = a/3333 - (c - b - a) = (3334/3333)a + b - c, \\ \quad y & = (b - 2a) - 2(c - b - a) = 3b - 2c, \\ \qquad z & = c - b - a, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & = (3334/3333)a + b - c - (3b - 2c) = (3334/3333)a - 2b + c, \\ \quad y & = 3b - 2c, \\ \qquad z & = c - b - a, \end{cases}$$

Assim o sistema admite solução única para quaisquer a, b e c.

2. Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique brevemente.

(a) Para quaisquer vetores $u, v \in \mathbb{R}^3$ temos

$$\langle u+v, u-v\rangle = |u|^2 - |v|^2.$$

Solução:

A afirmação é verdadeira; vamos verificar isso usando a linearidade do produto interno:

$$\begin{aligned}\langle u+v, u-v\rangle &= \langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle - \langle v,v\rangle \\ &= \langle u,u\rangle - \langle v,v\rangle = |u|^2 - |v|^2.\end{aligned}$$

(b) Todo sistema linear 2×3 admite pelo menos uma solução.

Solução:

A afirmação é falsa: vamos dar um contra-exemplo:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z &= 3, \\ 4x + 6y + 8z &= 7. \end{cases}$$

Note que a segunda equação menos duas vezes a primeira equação dá $0 = 1$.

3. Seja $V_1 \subset \mathbb{R}^5$ gerado pelos vetores $(1,1,1,1,1)$, $(0,1,2,3,4)$ e $(0,0,1,3,6)$. Seja $V_2 \subset \mathbb{R}^5$ o núcleo da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determine a dimensão de $W = V_1 \cap V_2$ e ache geradores para W.

Solução:

Escalonando a matriz que tem por linhas os geradores de V_1 temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \to$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

donde o elemento geral de V_1 é

$$(x_1, x_2, x_3, x_1 - 3x_2 + 3x_3, 3x_1 - 8x_2 + 6x_3)$$

e V_1 é definido pelas equações

$$\begin{cases} x_4 &= x_1 - 3x_2 + 3x_3, \\ x_5 &= 3x_1 - 8x_2 + 6x_3. \end{cases}$$

Por definição de núcleo, V_2 é definido pelas equações

$$\begin{cases} x_1 + x_5 &= 0, \\ x_2 + x_4 &= 0, \\ x_3 &= 0. \end{cases}$$

Assim, $W = V_1 \cap V_2$ é definido pelas equações

$$\begin{cases} x_1 + x_5 = 0, \\ x_2 + x_4 = 0, \\ x_3 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ -3x_1 + 8x_2 - 6x_3 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Devemos portanto escalonar a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & -6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & -6 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -8 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

O sistema tem portanto quatro equações L. I. e sua solução geral é $x_1 = -x_5$, $x_2 = -x_5/2$, $x_3 = 0$, $x_4 = x_5/2$. Assim W tem dimensão 1 e o vetor $(-1, -1/2, 0, 1/2, 1)$ gera W.

4. Os pontos

$$p_0 = (1, 1, 1, 0), \quad p_1 = (1, -1, -1, 0),$$
$$p_2 = (-1, 1, -1, 0), \quad p_3 = (-1, -1, 1, 0)$$

são os vértices de um tetraedro regular de aresta $a = 2\sqrt{2}$, isto é, a distância entre dois quaisquer pontos distintos é igual a a:

$$|p_0 - p_1| = |p_0 - p_2| = |p_0 - p_3| = |p_1 - p_2| = |p_1 - p_3| = |p_2 - p_3| = a.$$

(a) Encontre $p_4 \in \mathbb{R}^4$ que esteja a uma distância igual a a de p_0, p_1, p_2, p_3:

$$|p_0 - p_4| = |p_1 - p_4| = |p_2 - p_4| = |p_3 - p_4| = a.$$

(b) Encontre $q \in \mathbb{R}^4$ que seja equidistante de p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, isto é, tal que

$$|p_0 - q| = |p_1 - q| = |p_2 - q| = |p_3 - q| = |p_4 - q|.$$

(c) Determine o valor de $|p_0 - q|$.

Solução:

Seja $p_4 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Temos

$$\begin{aligned}
(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 + x_4^2 &= 8, \\
(x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 + (x_3 + 1)^2 + x_4^2 &= 8, \\
(x_1 + 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 + 1)^2 + x_4^2 &= 8, \\
(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 + (x_3 - 1)^2 + x_4^2 &= 8.
\end{aligned}$$

. Escreva $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = s$, expanda e passe as constantes para a direita para obter

$$\begin{aligned}
s - 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= 5, \\
s - 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 5, \\
s + 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 5, \\
s + 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 5,
\end{aligned}$$

que tem solução única $s = 5$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Assim $x_4^2 = 5$ e temos dois pontos p_4 que satisfazem o item (a): $(0, 0, 0, \sqrt{5})$ e $(0, 0, 0, -\sqrt{5})$. A partir de agora tomaremos $p_4 = (0, 0, 0, \sqrt{5})$.

Seja $q = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, $c = |p_0 - q|^2$,
$\tilde{s} = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 - c = |q|^2 - |p_0 - q|^2$. Temos

$$\begin{aligned}
(y_1 - 1)^2 + (y_2 - 1)^2 + (y_3 - 1)^2 + y_4^2 &= c, \\
(y_1 - 1)^2 + (y_2 + 1)^2 + (y_3 + 1)^2 + y_4^2 &= c, \\
(y_1 + 1)^2 + (y_2 - 1)^2 + (y_3 + 1)^2 + y_4^2 &= c, \\
(y_1 + 1)^2 + (y_2 + 1)^2 + (y_3 - 1)^2 + y_4^2 &= c, \\
y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + (y_4 - \sqrt{5})^2 &= c.
\end{aligned}$$

Novamente expandindo e passando as constantes para a direita temos

$$\begin{aligned}
\tilde{s} - 2y_1 - 2y_2 - 2y_3 \quad &= -3, \\
\tilde{s} - 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \quad &= -3, \\
\tilde{s} + 2y_1 - 2y_2 + 2y_3 \quad &= -3, \\
\tilde{s} + 2y_1 + 2y_2 - 2y_3 \quad &= -3, \\
\tilde{s} \qquad\qquad\qquad - 2\sqrt{5}y_4 &= -5
\end{aligned}$$

que tem solução única $\tilde{s} = -3$, $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, $y_4 = \sqrt{5}/5$. Assim $q = (0, 0, 0, \sqrt{5}/5)$, $|q| = \sqrt{5}/5$ e $|p_0 - q| = 4\sqrt{5}/5$. Note que $|q|^2 - |p_0 - q|^2 = 1/5 - 16/5 = -3$, consistentemente com o valor de $\tilde{s}$ obtido acima.