P1 de Introdução à Análise
2008.2
Data: 15 de setembro de 2008

Serão contadas as três melhores questões.

1. Seja $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma família de subconjuntos de $\mathbb{N}$ com $\mathrm{card}(A_k) = n$ para todo k. Sejam
$$B = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{j>k} A_j, \qquad C = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{j>k} A_j.$$
Diga se cada uma das afirmações abaixo é sempre verdadeira ou não; justifique demonstrando ou dando contra-exemplo:
   (a) $\mathrm{card}(B) \leq n$;
   (b) $\mathrm{card}(B) \geq n$;
   (c) $\mathrm{card}(C) \leq n$;
   (d) $\mathrm{card}(C) \geq n$.

2. Cada um dos conjuntos abaixo tem a cardinalidade de $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ou $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$: classifique-os, justificando suas respostas:
   (a) O conjunto de todas as funções *eventualmente periódicas* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (f é eventualmente periódica se existirem naturais a e b tais que $f(a + n) = f(n)$ para todo $n > b$).
   (b) O conjunto de todos os subconjuntos *finitos* ou *cofinitos* $X \subseteq \mathbb{N}$ ($X \subseteq \mathbb{N}$ é cofinito se $\mathbb{N} \smallsetminus X$ for finito).
   (c) O conjunto de todas as funções *estritamente crescentes* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

3. Sejam $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definidas recursivamente por
$$f(n+1) = 2^{(f(n))}, \quad f(0) = 2,$$
$$g(n+1) = 3^{(g(n))}, \quad g(0) = 2.$$
Demonstre que $f(n) < g(n) < f(n + 1)$ para todo inteiro positivo n. (Dica: temos $f(1) = 2^2 = 4$, $g(1) = 3^2 = 9$, $f(2) = 2^4 = 16$, $g(2) = 3^9 = 19683$, $f(3) = 2^{16} = 65536$; mostre por indução que $2g(n) < f(n + 1)$ para todo $n > 1$.)

4. Mostre que existe um corpo ordenado enumerável K, $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{R}$, tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, se $x \in K$ então $\exp(x) \in K$.

5. Para $X, Y \subset \mathbb{R}$ defina

$$X \cdot Y = \{xy; x \in X, y \in Y\}.$$

Mostre que se X e Y forem limitados e não vazios então $X \cdot Y$ também é limitado e não vazio saisfazendo

$$\sup(X \cdot Y) \geq (\sup(X))(\sup(Y)).$$

Mostre que nem sempre vale a igualdade.