

P2 de Introdução à Análise
2008.2

Data: 22 de outubro de 2008

Serão contadas as três melhores questões.

1. Uma seqüência (a_n) é *monótona* se for não-decrescente ou não-crescente; a seqüência é *eventualmente monótona* se existir N tal que a restrição da seqüência a $\{N, N + 1, N + 2, \dots\}$ for monótona.

(a) Mostre que toda seqüência de números reais admite subseqüência monótona.

(b) Diga se existe uma seqüência (a_n) que não seja eventualmente monótona e que não admita subseqüência não-decrescente. Justifique demonstrando ou dando um exemplo.

2. Diga se cada uma das séries abaixo converge ou diverge; justifique.

(a)

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n + 1}{n^3 + 5n^2 + 7n + 1}$$

(b)

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n \ln(n^2 + 2)}$$

(c)

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{(n(n+1)/2)}}{n}$$

3. Seja $K \subset [0, 1]$ o conjunto de Cantor usual. Dê exemplo de uma seqüência (a_n) cujo conjunto de pontos de aderência seja igual a K .

4. Seja

$$K_0 = \left\{ \sum_{n \geq 0} a_n 10^{(-2^n)}; \text{ para todo } n, a_n = 3 \text{ ou } 7 \right\}.$$

Mostre que K_0 é fechado não enumerável e que $K_0 \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

5. Para um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$, seja X' o conjunto dos pontos de acumulação de X . Dê exemplo de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tal que $X'' \neq X'''$.