P3 de Introdução à Análise
2008.2
Data: 1 de dezembro de 2008

Serão contadas as três melhores questões.

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{\cos(e^x)}{x^2 + 1}.$$

   (a) Diga se f é contínua.

   (b) Diga se f é uniformemente contínua.

   (c) Diga se f é Lipschitz.

2. Seja $F \subset \mathbb{R}$ um conjunto fechado. Mostre que existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua com $f(x) = 0$ para todo $x \in F$ e $f(x) > 0$ para todo $x \notin F$.

3. Seja K o conjunto de Cantor. Diga se existe $f : K \to [0, 1]$ contínua e sobrejetora. Justifique.

4. Mostre que existe uma única função $f : [0, 1] \to [0, 1]$ com

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} f(2x), & 0 \le x \le 1/2, \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3} f(2x - 1), & 1/2 < x \le 1. \end{cases}$$

   Diga em que pontos f é descontínua.

5. Seja $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2},\ a, b \in \mathbb{Z}\}$. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} a - b\sqrt{2}, & x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}],\ x = a + b\sqrt{2},\ a, b \in \mathbb{Z}, \\ x, & x \notin \mathbb{Z}[\sqrt{2}]. \end{cases}$$

   Calcule

$$\limsup_{x \searrow 0} f(x).$$