P1 de Análise Real ou Análise I
2008.1
Data: 16 de abril de 2008

Serão contadas as quatro melhores questões.

1. Seja (a_n) uma seqüência de números reais.
   Prove que se $\sum (a_n)^2$ converge então $\sum \frac{a_n}{n}$ também converge.

2. Sejam $\mathbb{N}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{N}\}$ e $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Z}\}$.
   Prove que $(\mathbb{N}[\sqrt{2}])' = \emptyset$, $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])' = \mathbb{R}$.

3. Um conjunto $K \subset \mathbb{R}$, $K \neq \emptyset$, é dito *perfeito* se $K' = K$.
   Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não enumerável;
   prove que existe um conjunto perfeito $K \neq \emptyset$ com $K \subseteq X'$.

4. Dê exemplo de uma função uniformemente contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que
   $$\limsup_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \liminf_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

5. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto enumerável.
   Mostre que existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e estritamente crescente
   tal que $f(x) \in \mathbb{Q}$ para todo $x \in X$.

6. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua.
   Mostre que existe um conjunto infinito não enumerável $X \subseteq [0, 1]$
   tal que f é monótona em X.