P1 de Análise Real ou Análise I
2008.1
Data: 16 de abril de 2008

Serão contadas as quatro melhores questões.

1. Seja (a_n) uma seqüência de números reais.
   Prove que se $\sum (a_n)^2$ converge então $\sum \frac{a_n}{n}$ também converge.

   Solução:

   Temos $|\frac{a_n}{n}| \leq \frac{1}{2}\left((a_n)^2 + \frac{1}{n^2}\right)$ (desigualdade da média aritmética e geométrica ou Cauchy-Schwartz). Como por hipótese $\sum (a_n)^2 = L_1 < +\infty$ e como sabemos que $\sum \frac{1}{n^2} = L_2 < +\infty$ temos $\sum |\frac{a_n}{n}| \leq \frac{L_1+L_2}{2}$ donde a série converge absolutamente.

2. Sejam $\mathbb{N}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{N}\}$ e $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Z}\}$.
   Prove que $(\mathbb{N}[\sqrt{2}])' = \emptyset$, $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])' = \mathbb{R}$.

   Solução:

   Para todo $M \in \mathbb{N}$ temos que se $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{N}[\sqrt{2}] \cap (-\infty, M)$ então $a, b < M$. Assim, $\mathbb{N}[\sqrt{2}] \cap (-\infty, M)$ é finito (tem no máximo M^2 elementos) donde $\mathbb{N}[\sqrt{2}]$ não tem pontos de acumulação em $(-\infty, M)$. Assim $(\mathbb{N}[\sqrt{2}])' = \emptyset$.

   Para cada $m \in \mathbb{Z}$ seja $n_m \in \mathbb{Z}$ o único inteiro tal que $p_m = n_m + m\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \cap [0, 1)$. Sabemos que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ donde os pontos p_m são todos distintos. Seja (m_k) uma seqüência estritamente crescente de naturais tal que (p_{m_k}) seja convergente. Assim $q_k = |p_{m_{k+1}} - p_{m_k}|$ é uma seqüência de elementos positivos de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ com $\lim_k q_k = 0$.

   Dado $x \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$ seja k tal que $0 < q_k < \epsilon$ e seja ℓ o menor inteiro tal que $\ell q_k > x - \epsilon$. Temos $(\ell - 1)q_k \leq x - \epsilon$ donde $\ell q_k \leq x - \epsilon + q_k < x + \epsilon$. Assim $\ell q_k \in (x - \epsilon, x + \epsilon) \cap \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \neq \emptyset$ concluindo a demonstração.

3. Um conjunto $K \subset \mathbb{R}$, $K \neq \emptyset$, é dito *perfeito* se $K' = K$.
Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não enumerável;
prove que existe um conjunto perfeito $K \neq \emptyset$ com $K \subseteq X'$.

Solução:

Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é *ponto de condensação* de X se para todo $\epsilon > 0$ o conjunto $(x - \epsilon, x + \epsilon) \cap X$ for não enumerável. Seja K o conjunto dos pontos de condensação de X. Claramente $K \subseteq X'$: supondo X não enumerável vamos provar que K é perfeito, resolvendo o problema.

Vamos primeiro provar que $K \neq \emptyset$. Como X é não enumerável, existe n tal que $[n, n+1] \cap X$ é não enumerável; seja $I_0 = [n, n+1]$. Dado um intervalo $I = [a, b]$ tal que $I \cap X$ é não enumerável considere $I_- = [a, c]$ e $I_+ = [c, b]$ onde $c = (a+b)/2$: claramente pelo menos um dos conjuntos $I_- \cap X$, $I_+ \cap X$ é não enumerável. Assim, podemos construir uma seqüência (I_n) de intervalos encaixados com $|I_n| = 2^{(-n)}$ tal que $I_n \cap X$ é não enumerável para todo n. Seja x o único elemento de $\bigcap_n I_n$: temos $x \in K$.

Vamos agora provar que K não tem pontos isolados. Considere $x \in K$ e $\epsilon > 0$. Considere os intervalos $J_{2n} = [x - 2^{(-n-1)}\epsilon, x - 2^{(-n-2)}\epsilon]$, $J_{2n+1} = [x + 2^{(-n-2)}\epsilon, x + 2^{(-n-1)}\epsilon]$, $n \in \mathbb{N}$. Deve existir n tal que $J_n \cap X$ seja não enumerável pois caso contrário $(x - \epsilon/2, x + \epsilon/2) \cap X \subseteq \bigcup_n (J_n \cap X)$ seria enumerável, contrariando a hipótese de x ser ponto de condensação de X. Pelo parágrafo anterior, o conjunto não enumerável $J_n \cap X$ deve admitir um ponto de condensação $\tilde{x}$: temos $\tilde{x} \in (x - \epsilon, x + \epsilon) \cap K$, $\tilde{x} \neq x$, completando a prova.

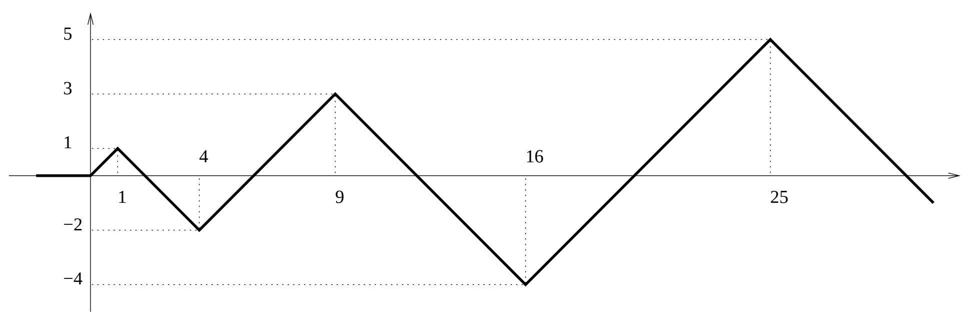
4. Dê exemplo de uma função uniformemente contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\limsup_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \liminf_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

Solução:

Defina

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 4, \\ -6+x, & 4 \leq x \leq 9, \\ 12-x, & 9 \leq x \leq 16, \\ \cdots & \\ -2k(2k+1)+x, & (2k)^2 \leq x \leq (2k+1)^2, \\ (2k+1)(2k+2)-x, & (2k+1)^2 \leq x \leq (2k+2)^2, \\ \cdots & \end{cases}$$



Claramente f é 1-Lipschitz donde uniformemente contínua.

5. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto enumerável.
Mostre que existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e estritamente crescente tal que $f(x) \in \mathbb{Q}$ para todo $x \in X$.

Solução:

Suponha sem perda de generalidade que $\mathbb{Q} \subseteq X$ (do contrário tomamos $X \cup \mathbb{Q}$ como o novo X). Vamos construir uma função f que seja 1-Lipschitz. Primeiro vamos provar a seguinte afirmação.

Seja Y_1 um conjunto finito e $f_1 : Y_1 \to \mathbb{Q}$ uma função estritamente crescente e L_1-Lipschitz. Seja $y \in \mathbb{R}$, $y \notin Y_1$; seja $Y_2 = Y_1 \cup \{y\}$. Seja $L_2 > L_1$. Então existe $f_2 : Y_2 \to \mathbb{Q}$ estritamente crescente e L_2-Lipschitz com $f_1 = f_2|_{Y_1}$.

O caso $Y_1 = \emptyset$ é trivial. Suponha que $y > \tilde{y}$ para todo $\tilde{y} \in Y_1$; seja y_- o maior elemento de Y_1. Basta definir $f_2(y)$ como qualquer racional no intervalo $(f_1(y_-), f_1(y_-) + L_2(y - y_-))$. O caso em que $y < \tilde{y}$ para todo $\tilde{y} \in Y_1$ é análogo. Resta considerar o caso em que existem elementos de Y_1 menores e maiores do que y. Sejam $y_- = \max Y_1 \cap (-\infty, y)$, $y_+ = \min Y_1 \cap (y, +\infty)$. Devemos definir $f_2(y) = z$ onde $z \in (z_-, z_+) \cap \mathbb{Q}$,

$$
\begin{aligned}
z_- &= \max\{f_1(y_-), f_1(y_+) - L_2(y_+ - y)\}, \\
z_+ &= \min\{f_1(y_+), f_1(y_-) + L_2(y - y_-)\}.
\end{aligned}
$$

As hipóteses sobre f_1 (estritamente crescente, L_1-Lipschitz) garantem que $z_- < z_+$; a densidade de $\mathbb{Q}$ completa a prova da afirmação.

Seja (x_n) uma enumeração de X; para cada n (em ordem) usamos a afirmação acima para definir $f(x_n)$ de tal forma que f restrita a $\{x_0, \ldots, x_n\}$ seja estritamente crescente, $(1 - 2^{(-n)})$-Lipschitz e que leve cada x_n em um racional. Temos agora uma função $f : X \to \mathbb{Q}$ que é estritamente crescente e 1-Lipschitz e portanto uniformemente contínua. A função f pode portanto ser estendida a $\mathbb{R}$ (o fecho de X) mantendo-se estritamente crescente e 1-Lipschitz.

6. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua.
Mostre que existe um conjunto infinito não enumerável $X \subseteq [0,1]$
tal que f é monótona em X.

Solução:

Se f for constante o problema é trivial. Suponha sem perda de generalidade que existam $a < b$ com $f(a) < f(b)$. Seja

$$X = \{x \in [a,b] \mid \forall \tilde{x} \in [a,x), f(\tilde{x}) < f(x)\}.$$

Claramente f é estritamente crescente em X. Por outro lado para todo $y \in [f(a), f(b)]$ seja $x_y = \min[a,b] \cap f^{-1}(\{y\})$; o teorema do valor intermediário garante que o conjunto compacto $[a,b] \cap f^{-1}(\{y\})$ é não vazio. Por construção $x_y \in X$ e $y \neq \tilde{y}$ implica $x_y \neq x_{\tilde{y}}$ donde X é não enumerável.