P2 de Análise Real ou Análise I
2008.1
Data: 26 de maio de 2008

Serão contadas as três melhores questões.

1. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável em todo ponto de I. Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique demonstrando ou dando um contra-exemplo.

   (a) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$ então f é estritamente crescente em I.

   (b) Se $f'(x_0) > 0$ ($x_0 \in I$) então existe $\epsilon > 0$ tal que f é estritamente crescente em $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset I$.

   (c) Se $f'(x_0) > 0$ e f' é contínua em x_0 então existe $\epsilon > 0$ tal que f é estritamente crescente em $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset I$.

2. Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ polinômios reais tais que $Q(x)$ não tenha raiz real positiva. Seja $R(x) = P(x)/Q(x)$ e seja
$$f_R(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ R(x)\exp(-x^{-2}), & x > 0. \end{cases}$$

   (a) Mostre que f_R é contínua em $\mathbb{R}$ (para quaisquer P, Q e R como acima).

   (b) Mostre que $f'_R(0) = 0$ (isto inclui mostrar que a derivada existe).

   (c) Mostre que f_R é de classe C^∞ (ou seja, que é suave).

3. Seja
$$f(x) = \begin{cases} 1/q, & x = p/q,\ p, q \in \mathbb{Z},\ q > 0,\ \mathrm{mdc}(p,q) = 1, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

   (a) Em quais pontos f é contínua?

   (b) Em quais pontos f é derivável?

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função suave satisfazendo $f(-1) = -1$, $f'(-1) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$. Mostre que existe x tal que $|f''(x)| > 2$.

5. Mostre que
$$n^n e^{-n} < n! < n^n e^{-n}(en).$$
(Dica: estime $\int_1^n \ln(t)dt$.)

6. Diga se a afirmação abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique demonstrando ou dando um contra-exemplo.

   Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e integrável (ne sentido de Riemann) e seja $h : [0, 1] \to [0, 1]$ uma função contínua. Então $f \circ h$ é integrável.