P2 de Análise Real ou Análise I
2008.1
Data: 26 de maio de 2008

Serão contadas as três melhores questões.

1. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável em todo ponto de I. Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique demonstrando ou dando um contra-exemplo.

   (a) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$ então f é estritamente crescente em I.

   (b) Se $f'(x_0) > 0$ ($x_0 \in I$) então existe $\epsilon > 0$ tal que f é estritamente crescente em $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset I$.

   (c) Se $f'(x_0) > 0$ e f' é contínua em x_0 então existe $\epsilon > 0$ tal que f é estritamente crescente em $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset I$.

   Solução:

   A afirmação (a) é VERDADEIRA. De fato, dados $a, b \in I$, $a < b$, pelo TVM temos que $(f(b) - f(a)) = f'(c)(b - a)$ para algum $c \in (a, b)$. Como por hipótese $f'(c) > 0$ temos $f(b) - f(a) > 0$ donde $f(a) < f(b)$.

   A afirmação (b) é FALSA. Seja $I = (-1, 1)$, $x_0 = 0$ e

   $$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \cos(x^{-2}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

   Temos

   $$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x + x^2 \cos(x^{-2})}{x} = \lim_{x \to 0} 1 + x \cos(x^{-2}) = 1 > 0$$

   assim este exemplo satisfaz as hipóteses da afirmação. Por outro lado, para $x \neq 0$ temos

   $$f'(x) = 1 + 2x \cos(x^{-2}) + 2x^{-1} \operatorname{sen}(x^{-2}).$$

   Para $k > 0$ seja $J_k = (((7\pi/4) + 2k\pi)^{-1/2}, ((5\pi/4) + 2k\pi)^{-1/2})$. Em J_k temos $\operatorname{sen}(x^{-2}) < -\sqrt{2}/2$ donde $f'(x) < 3 - \sqrt{2}((5\pi/4) + 2k\pi)^{1/2} < 0$ e portanto aplicando o item (a) à função $-f$ temos que f é estritamente decrescente em J_k. Por outro lado, todo intervalo da forma $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ contem os intervalos J_k para k suficientemente grande.

   A afirmação (c) é VERDADEIRA. De fato, pela continuidade de f' existe $\epsilon > 0$ tal que $f'(x) > 0$ para todo x em $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$; basta agora aplicar o item (a).

2. Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ polinômios reais tais que $Q(x)$ não tenha raiz real positiva. Seja $R(x) = P(x)/Q(x)$ e seja

$$f_R(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ R(x)\exp(-x^{-2}), & x > 0. \end{cases}$$

   (a) Mostre que f_R é contínua em $\mathbb{R}$ (para quaisquer P, Q e R como acima).

   (b) Mostre que $f_R'(0) = 0$ (isto inclui mostrar que a derivada existe).

   (c) Mostre que f_R é de classe C^∞ (ou seja, que é suave).

Solução:

É trivial que f_R é contínua em $x \neq 0$; basta portanto mostrar que

$$\lim_{x \searrow 0} R(x)\exp(-x^{-2}) = 0.$$

Escreva $R(x) = x^{-n}\tilde{R}(x)$ onde $\tilde{R}$ está definida em $x = 0$ e satisfaz $\tilde{R}(0) \neq 0$. Temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \searrow 0} R(x)\exp(-x^{-2}) &= \tilde{R}(0) \lim_{x \searrow 0} x^{-n}\exp(-x^{-2}) \\ &= \tilde{R}(0) \lim_{y \to +\infty} y^n \exp(-y^2) \\ &= \tilde{R}(0) \lim_{y \to +\infty} \frac{y^n}{\exp(y^2)}; \end{aligned}$$

onde fizemos a substituição $y = 1/x$. Temos $\lim_{y \to +\infty} \exp(y^2) = +\infty$ donde se $n \leq 0$ então o último limite é igual a 0, completando a demonstração. O caso $n > 0$ é tratado por indução pois por l'Hôpital temos

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{y^n}{\exp(y^2)} = \lim_{y \to +\infty} \frac{ny^{n-1}}{2y\exp(y^2)} = \frac{n}{2} \lim_{y \to +\infty} \frac{y^{n-2}}{\exp(y^2)} = 0.$$

Isto conclui o item (a).

Para o item (b) devemos verificar que

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{R(x)}{x} \exp(-x^{-2}) = 0.$$

Ora, isto segue do item (a) para $R_1(x) = R(x)/x$.

Pelos itens (a) e (b) (mais regras de derivação) temos

$$f_R'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ (R'(x) + 2x^{-3}R(x))\exp(-x^{-2}), & x > 0, \end{cases}$$

ou seja, $f_R' = f_{R_2}$ para $R_2(x) = R'(x) + 2x^{-3}R(x)$. Assim, pelos itens (a) e (b) a função f_R' é contínua e derivável. Repetindo este argumento n vezes vemos que f_R é de classe C^n. Isto conclui o item (c).

3. Seja
$$f(x) = \begin{cases} 1/q, & x = p/q,\ p, q \in \mathbb{Z},\ q > 0,\ \mathrm{mdc}(p, q) = 1, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

   (a) Em quais pontos f é contínua?

   (b) Em quais pontos f é derivável?

   Solução:

   Se $x \in \mathbb{Q}$ então f é descontínua em x pois a seqüência $x_n = x + \sqrt{2}/2^n$ satisfaz $\lim x_n = x$, $\lim f(x_n) = 0 \neq f(x)$. Por outro lado, se $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ então f é contínua em x. De fato, dado $\epsilon > 0$ seja n um inteiro positivo com $1/n < \epsilon$. Seja Y o conjunto dos racionais com denominador menor ou igual a n entre $x - 1$ e $x + 1$: o conjunto Y é finito. Seja $\delta = \min_{y \in Y} |x - y|$; note que $\delta < 1/2$. Assim para todo $\tilde{x}$, $|x - \tilde{x}| < \delta$ implica $|f(x) - f(\tilde{x})| < \epsilon$. Isto conclui o item (a).

   Se $x \in \mathbb{Q}$ então f não é derivável em x (pois não é contínua). Se $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ afirmamos que f não é derivável em x. Claramente
$$\liminf_{\tilde{x} \searrow x} \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{\tilde{x} - x} = 0 :$$
   basta observar que a expressão dentro do limite é sempre maior ou igual a 0 e que é igual a 0 para $\tilde{x} \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$. Afirmamos que
$$\limsup_{\tilde{x} \searrow x} \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{\tilde{x} - x} \geq 1.$$
   De fato, dado n seja $x_n = \lceil nx \rceil / n$ (isto é, x_n é o menor racional maior que x que pode ser escrito com denominador n). Temos $f(x_n) \geq 1/n$ e $x_n - x < 1/n$ donde a expressão dentro do limite é maior do que 1.

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função suave satisfazendo $f(-1) = -1$, $f'(-1) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$. Mostre que existe x tal que $|f''(x)| > 2$.

   Solução:

   Seja $g(x) = f'(x)$. Temos $g(-1) = g(1) = 0$ e $\int_{-1}^{1} g(x)dx = 2$. Suponha por absurdo que $|g'(x)| \leq 2$ para todo x. Temos $g(x) \leq h(x)$ para $x \in [-1, 1]$ onde
$$h(x) = \begin{cases} 2 + 2x, & -1 \leq x \leq 0, \\ 2 - 2x, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$
   Mas $\int_{-1}^{1} h(x)dx = 2$. Como g e h são contínuas, isto significa que $g = h$. Mas h não é suave, absurdo.

5. Mostre que
$$n^n e^{-n} < n! < n^n e^{-n}(en).$$
(Dica: estime $\int_1^n \ln(t)dt$.)

Solução:

Temos
$$\ln(1) + \ln(2) + \cdots + \ln(n-1) < \int_1^n \ln(t)dt < \ln(2) + \ln(3) + \cdots + \ln(n)$$
ou
$$\ln((n-1)!) < n\ln(n) - n + 1 < \ln(n!).$$
Calculando exponenciais,
$$(n-1)! < n^n e^{-n} e < n!.$$
A segunda desigualdade dá $n^n e^{-n} < n!$. Multiplicando a primeira por n temos $n! < n^n e^{-n}(en)$, completando a solução do problema.

6. Diga se a afirmação abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique demonstrando ou dando um contra-exemplo.

Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e integrável (ne sentido de Riemann) e seja $h : [0,1] \to [0,1]$ uma função contínua. Então $f \circ h$ é integrável.

Solução:

Seja K_0 o conjunto de Cantor usual (que tem medida 0) e seja $K_1 \subset [0,1]$ um conjunto de Cantor de medida positiva. Seja
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in K_0, \\ 0, & x \in [0,1] \smallsetminus K_0. \end{cases}$$
O conjunto dos pontos de descontinuidade de f é K_0 (que tem medida 0) donde f é Riemann-integrável.

Seja $h : [0,1] \to [0,1]$ uma função contínua e estritamente crescente com $h(K_1) = K_0$. A função h pode ser construída primeiramente em $[0,1] \smallsetminus K_1$ como uma função afim em cada intervalo aberto do complemento: h é a seguir estendida para $[0,1]$ por continuidade. O conjunto dos pontos de descontinuidade da composta $f \circ h$ é K_1 (que tem medida positiva) donde $f \circ h$ não é Riemann-integrável.