MONITORIA DE CÁLCULO II ESPECIAL – 28/08/09

Selecionamos alguns exercícios sobre os tópicos estudados nas últimas duas semanas. É importante ressaltar que deve-se tentar resolver outros exercícios além dos contidos aqui.

§1. Diferenciabilidade

1.1 Calcule todas as derivadas parciais de primeira ordem das seguintes funções:
(a) $f(x,y) = x^2 + y^2 \sin(xy)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;
(b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;
(c) $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;
(d) $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$, $x \neq y$;
(e) $f(x) = a \cdot x$, a fixo, $x \in \mathbb{R}^n$;
(f) $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, $a_{ij} = a_{ji}$.

1.2 Seja $v(r,t) = t^n e^{-r^2/(4t)}$. Ache um valor para a constante n de modo que v satisfaça a seguinte equação:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r} \right).$$

1.3 (a) Mostre que não existe uma função f tal que $f'(a;y) > 0$ para um vetor a fixo e todo vetor não-nulo y.
(b) Dê um exemplo de uma função f tal que $f'(x;y) > 0$ para um vetor fixo y e todo vetor x.

1.4 Calcule as derivadas parciais de primeira ordem das seguintes funções:
(a) $f(x,y) = \tan(x^2/y)$, $y \neq 0$;
(b) $f(x,y) = \arctan(y/x)$, $x \neq 0$;
(c) $f(x,y) = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$, $xy \neq 1$;
(d) $f(x,y) = x^{(y^2)}$, $x > 0$;
(e) $f(x,y) = \arccos \sqrt{x/y}$.

§2. O Gradiente

2.1 Encontre o gradiente das seguintes funções em cada ponto em que ele existe:
(a) $f(x,y) = x^2 + y^2 \sin(xy)$;
(b) $f(x,y) = e^x \cos y$;
(c) $f(x,y,z) = x^2 y^3 z^4$;
(d) $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + 2z^2$;
(e) $f(x,y,z) = \log(x^2 + 2y^2 - 3z^2)$;
(f) $f(x,y,z) = x^{y^z}$.

2.2 Calcule as derivadas direcionais das seguintes funções para os pontos e direções indicadas:
(a) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ no ponto $(1,1,0)$ na direção $\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$.
(b) $f(x,y,z) = (x/y)^z$ no ponto $(1,1,1)$ na direção $2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$.

2.3 Encontre os pontos (x,y) e as direções determinadas por *vetores unitários* para as quais a derivada direcional de $f(x,y) = 3x^2 + y^2$ atinge seu maior valor quando restrita ao círculo $x^2 + y^2 = 1$.

2.4 Uma função tem derivada direcional no ponto $(1,2)$ e direção do ponto $(2,2)$ igual a $+2$ e no ponto $(1,2)$ e direção do ponto $(1,1)$ igual a -2 (as direções são tomadas a partir do ponto $(1,2)$). Determine o gradiente no ponto $(1,2)$ e calcule a derivada direcional na direção do ponto $(4,6)$.

2.5 Sejam f e g funções diferenciáves num subconjunto aberto S de $\mathbb{R}^n$. Deduza as seguintes propriedades do gradiente: (*Observação:* Não vale a pena memorizar estas fórmulas!)

(a) $\operatorname{grad} f = 0$ se f é constante em S;
(b) $\operatorname{grad}(f+g) = \operatorname{grad} f + \operatorname{grad} g$;
(c) $\operatorname{grad}(cf) = c \operatorname{grad} f$ se c é uma constante;
(d) $\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$;
(e) $\operatorname{grad}(f/g) = \frac{g \operatorname{grad} f - f \operatorname{grad} g}{g^2}$ nos pontos onde $g \neq 0$.

2.6 Suponha que f é uma função diferenciável em cada ponto de uma bola $B(a) \subset \mathbb{R}^n$.

(a) Se $\operatorname{grad} f(x) = 0$ para todo $x \in B(a)$, prove que f é constante em $B(a)$.
(b) Se $f'(x; y) = 0$ para n vetores linearmente independentes $y_1, \ldots, y_n$ e para cada $x \in B(a)$, prove que f é constante em $B(a)$.

§3. Continuidade

3.1 Seja $f\colon S \to \mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}^n$, uma função contínua em um ponto interior $a \in S$. Se $f(a) \neq 0$, mostre que existe uma bola $B(a)$ na qual f tem o mesmo sinal que $f(a)$.

3.2 Se $(x, y) \neq (0, 0)$, seja $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$. Encontre o limite de $f(x, y)$ quando $(x, y) \to (0, 0)$ ao longo da reta $y = mx$. É possível definir $f(0, 0)$ de modo que f seja contínua em $(0, 0)$?

3.3 Seja $f(x, y) = 0$ se $y \leq 0$ ou se $y \geq x^2$ e seja $f(x, y) = 1$ se $0 < y < x^2$. Mostre que $f(x, y) \to 0$ quando $(x, y) \to (0, 0)$ ao longo de qualquer reta pela origem. Ache uma curva passando pela origem ao longo da qual f tem o valor constante 1. Conclua: f é contínua na origem?

3.4 Se $f(x, y) = [\sin(x^2 + y^2)]/(x^2 + y^2)$ quando $(x, y) \neq (0, 0)$ como devemos definir f em $(0, 0)$ de modo que ela seja contínua aí?

§4. Pontos Críticos

4.1 Para cada uma das funções abaixo:

$$f_1(x, y) = x^4 - 2x^2 + 2y^2; \qquad f_2(x, y) = x^3 + y^3 - x - y;$$
$$f_3(x, y) = x^4 + y^4; \qquad f_4(x, y) = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^2 - 2y^2.$$

(a) Calcule $\operatorname{grad} f$;
(b) Encontre os pontos críticos de f;
(c) Use o computador para esboçar o gráfico de f. A partir do esboço, determine se cada ponto crítico é máximo local, mínimo local ou sela;
(d) Usando o computador, esboce as curvas de nível de f.

4.2 Para cada uma das funções abaixo:

$$g_1(x, y) = x^3 - 3xy^2; \qquad g_2(x, y) = x^2y^2;$$
$$g_3(x, y) = 1 - x^2; \qquad g_4(x, y) = 2 - x^2 - y^2.$$

(a) Calcule $\operatorname{grad} g$;
(b) Encontre os pontos críticos de g;
(c) Use o computador para esboçar o gráfico de g. A partir do esboço, determine se cada ponto crítico é máximo local, mínimo local ou sela;
(d) Usando o computador, esboce as curvas de nível de g.