MONITORIA DE CÁLCULO II ESPECIAL – 04/09/2009

§1. Derivadas parciais, gradiente, pontos críticos

1.1 Sejam $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}^n$ tal que existem todas as derivadas direcionais de f em a. Prove que se a é um ponto de mínimo (máximo) local então $\operatorname{grad} f(a) = 0$. A recíproca é verdadeira?

1.2 Ache os pontos críticos das superfícies definidas pelas seguintes equações *sem usar o computador*. Usando o MAPLE somente nos itens (e) e (f), classifique-os como máximo local, mínimo local ou sela:
(a) $z = x^2 + (y-1)^2$;
(b) $z = x^2 - (y-1)^2$;
(c) $z = 1 + x^2 - y^2$;
(d) $z = (x - y + 1)^2$;
(e) $z = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y$;
(f) $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$;

1.3 Seja f uma função $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável no ponto $a \in \mathbb{R}^2$. Suponha que $\operatorname{grad} f(a) \cdot \boldsymbol{y} = 1$ e $\operatorname{grad} f(a) \cdot \boldsymbol{z} = 2$, onde $\boldsymbol{y} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$. Faça um esboço dos pontos $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ em que $\operatorname{grad} f(a) \cdot \boldsymbol{x} = 6$. Calcule $\operatorname{grad} f(a)$.

1.4 Seja $\boldsymbol{r}(x,y,z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ uma *aplicação*[1] de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ e seja $r\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $r(x,y,z) = \|\boldsymbol{r}(x,y,z)\|$.
(a) Mostre que $\operatorname{grad} r(x,y,z)$ é um vetor unitário na direção de $\boldsymbol{r}(x,y,z)$;
(b) Mostre que $\operatorname{grad} r^n = nr^{n-2}\boldsymbol{r}$ se n é um inteiro positivo (*Dica*: use indução e o fato de que $\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$);
(c) A fórmula em (b) vale se n é um inteiro negativo ou zero?
(d) Ache uma função $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{grad} f = \boldsymbol{r}$.

1.5 Considere as seguintes afirmações sobre uma função $f\colon S \to \mathbb{R}$, onde $S \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto e a é um ponto interior de S:
(1) f é contínua em a;
(2) f é diferenciável em a;
(3) Existe a derivada direcional de f em a com relação a y;
(4) Todas as n derivadas parciais de primeira ordem de f existem numa vizinhança de a e são contínuas em a;
(5) $\operatorname{grad} f(a) = 0$;
(6) $f(x) = \|x - a\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$;

Seja $A = (a_{ij})$ a matriz 6×6 tal que $a_{ij} = 1$ se a afirmação (i) implica a afirmação (j) e $a_{ij} = 0$ caso contrário. Determine o maior número de entradas de A que conseguir.

§2. Superfícies de nível

2.1 Para cada uma das funções f e valores $c \in \mathbb{R}$ faça um esboço das curvas de nível $f^{-1}(c)$ *sem usar o computador*:
(a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $\quad c = 0, 1, 4, 9$;
(b) $f(x,y) = e^{xy}$, $\quad c = e^{-2}, e^{-1}, 1, e, e^2, e^3$;
(c) $f(x,y) = \cos(x+y)$, $\quad c = -1, 0, 1/2, \sqrt{2}/2, 1$;
(d) $f(x,y,z) = x + y + z$, $\quad c = -1, 0, 1$;
(e) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, $\quad c = 0, 6, 12$;
(f) $f(x,y,z) = \sin(x^2 + y^2 + z^2)$, $\quad c = -1, -1/2, 0, \sqrt{2}/2, 1$.

[1] Normalmente chamamos uma função $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ de *aplicação* se $n > 1$.

2.2 Em cada caso, calcule a derivada direcional de f para os pontos e direções especificadas:

(a) $f(x, y, z) = 3x - 5y + 2z$ em $(2, 2, 1)$ na direção da normal exterior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

(b) $f(x, y, z) = x^2 - y^2$ em um ponto arbitrário da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ na direção da normal exterior naquele ponto.

(c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ em $(3, 4, 5)$ ao longo da curva que é a intersecção das superfícies $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 25$ e $x^2 + y^2 = z^2$.

2.3 (a) Encontre um vetor $\boldsymbol{v}(x, y, z)$ normal à superfície $z = \sqrt{x^2 + y^2} + (x^2 + y^2)^{3/2}$ em um ponto $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ arbitrário nesta superfície.

(b) Encontre o cosseno do ângulo θ entre $\boldsymbol{v}(x, y, z)$ e o eixo-z e determine o limite de $\cos\theta$ quando $(x, y, z) \to (0, 0, 0)$.

2.4 Se (x_0, y_0, z_0) pertence à superfície $z = xy$ então as linhas $\{z = y_0 x,\ y = y_0\}$ e $\{z = x_0 y,\ x = x_0\}$ pertencem à superfície e se intersectam nesse ponto. Verifique que o plano tangente à superfície no ponto (x_0, y_0, z_0) contém de fato estas linhas.

2.5 Encontre equações cartesianas para a linha que é tangente a ambas as superfícies $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$ e $z = e^{x-y}$ no ponto $(1, 1, 1)$.

2.6 Seja $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$.

(a) Verifique que $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$ são ambas zero na origem.

(b) A superfície $z = f(x, y)$ tem um plano tangente na origem? [*Dica*: considere a curva determinada na superfície pelo plano $x = y$.] Por que isso é possível neste caso?

§3. Aproximações de Taylor

Abaixo denotaremos por $T_n(f)$ o *polinômio de Taylor* de f de grau n.

3.1 Encontre a forma geral para $T_n(\sin)(x)$ e $T_n(\cos)(x)$. Usando o MAPLE, compare os gráficos de $\sin x$ e $T_n(\sin)(x)$, e de $\cos x$ e $T_m(\cos)(x)$ para $n = 3, 5, 7, 9, 11,\ m = 2, 4, 6, 8, 10$.

3.2 Prove que:

(a) $T_n(c_1 f + c_2 g) = c_1 T_n f + c_2 T_n g$ para constantes c_1, c_2;

(b) $(T_n f)' = T_{n-1}(f')$;

(c) Se $g(x) = \int_a^x g(t)\,dt$ então $T_{n+1} g(x) = \int_a^x T_n f(t)\,dt$.

3.3 Use o exercício anterior para verificar que os polinômios de Taylor das funções abaixo são os indicados. Em cada caso, f está definida para todo x para o qual $f(x)$ faz sentido:

(a) $T_n(a^x) = \sum_{k=0}^n \frac{(\log a)^k}{k!} x^k$;

(b) $T_n[\log(1 + x)] = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}$;

(c) $T_n\left(\frac{1}{1+x}\right) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k$;

(d) $T_n\left(\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$;

(e) $T_n\left(\frac{x}{1-x^2}\right) = \sum_{k=0}^n x^{2k+1}$;

(f) $T_n\left(\frac{1}{2-x}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{2^{k+1}}$;

(g) $T_n(1 + x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k$, onde $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

3.4 Suponha que f tenha derivada de todas as ordens em 0. Escreva $f(x) = T_n f(x) + E_n f(x)$ (ou seja, $E_n f$ é o erro que se comete ao aproximar f por $T_n f$). Verifique que:

(a) $|E_{2n}(\sin)(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$ [Use o resultado encontrado em 3.1];

(b) $|E_{2n+1}(\cos)(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$ [Use o resultado encontrado em 3.1];

(c) $|E_{2n}(\arctan)(x)| \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, para $0 \leq x \leq 1$.