MONITORIA DE CÁLCULO II ESPECIAL – 18/09/2009

Pontos críticos e a Hessiana

1. Encontre (se existirem) e classifique como máximo local, mínimo local ou sela os pontos críticos das superfícies abaixo:

(a) $z = x^2 + (y-1)^2$;
(b) $z = x^2 - (y-1)^2$;
(c) $z = 1 + x^2 - y^2$;
(d) $z = (x - y + 1)^2$;
(e) $z = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y$;
(f) $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$;
(g) $z = x^3 - 3xy^2 + y^3$;
(h) $z = x^2y^3(6 - x - y)$;
(i) $z = x^3 + y^3 - 3xy$;
(j) $z = \sin x \cosh y$; (define-se $\cosh y = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})$)
(k) $z = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$;
(l) $z = (5x + 7y - 25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$;
(m) $z = \sin x \sin y \sin(x+y)$, $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$;
(n) $z = x - 2y + \log(\sqrt{x^2+y^2}) + 3\arctan(y/x)$, $x > 0$;
(o) $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

2. Seja $f(x, y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$. Mostre que quando restrita a cada linha $y = mx$ a função tem um mínimo em $(0, 0)$, mas que mesmo assim $(0, 0)$ não é mínimo local de f.

3. Seja $f(x, y) = (3 - x)(3 - y)(x + y - 3)$.

(a) Esboce o conjunto dos pontos (x, y) tais que $f(x, y) \geq 0$.
(b) Encontre os pontos (x, y) no plano para os quais $D_1f(x, y) = D_2f(x, y) = 0$. [*Dica*: $D_1f(x, y)$ tem $(3 - y)$ como fator.]
(c) Quais dos pontos críticos são mínimos locais? Máximos locais? Nenhum dos dois? Justifique.
(d) f possui um mínimo absoluto ou máximo absoluto no plano? Justifique.

4. Determine todos os mínimos (resp. máximos) relativos e absolutos da função $f(x, y) = xy(1-x^2-y^2)$ no quadrado $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

5. Determine constantes a e b tais que a integral

$$\int_0^1 (ax + b - f(x))^2 \, dx$$

assume o menor valor possível se (a) $f(x) = x^2$; (b) $f(x) = (x^2 + 1)^{-1}$.

Respostas para o exercício 1

(a) Mínimo absoluto em $(0, 1)$;
(b) Sela em $(0, 1)$;
(c) Sela em $(0, 0)$;
(d) Mínimo absoluto em cada ponto da linha $y = x + 1$;
(e) Sela em $(1, 1)$;
(f) Mínimo absoluto em $(1, 0)$;
(g) Sela em $(0, 0)$;

(h) Selas em $(0,6)$ e em $(x,0)$ para todo x; mínimos locais em $(0,y)$, $0 < y < 6$, máximos locais em $(2,3)$ e em $(0,y)$ para $y < 0$ ou $y > 6$;
(i) Sela em $(0,0)$; mínimo local em $(1,1)$;
(j) Selas em $(n\pi + \pi/2, 0)$ para n inteiro;
(k) Mínimo absoluto em $(0,0)$; sela em $(-1/4, -1/2)$;
(l) Mínimo absoluto em $(-1/26, -3/26)$; máximo absoluto em $(1,3)$;
(m) Máximo absoluto em $(\pi/3, \pi/3)$; mínimo absoluto em $(2\pi/3, 2\pi/3)$; máximo relativo em (π,π); mínimo relativo em $(0,0)$; sela em $(0,\pi)$ e $(\pi,0)$;
(n) Sela em $(1,1)$;
(o) Máximo absoluto em cada ponto do círculo $x^2 + y^2 = 1$; mínimo absoluto em $(0,0)$.