

P4 de Equações diferenciais e de diferenças

MAT 1154 — 2004.2

Data: 11 de Dezembro de 2004

Nome: _____ Matrícula: _____

Assinatura: _____ Turma: _____

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	1.0		
1b	1.0		
1c	1.0		
1d	1.0		
1e	1.0		
1f	1.0		
	2.0		
	2.0		
Total	10.0		

Instruções

- A questão 1 é obrigatória. Além da questão 1, escolha duas outras para serem corrigidas e indique a sua escolha na tabela acima.
- Mantenha seu telefone celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta.
- Você tem direito a uma folha de consulta.
- Não destaque as folhas da prova.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Resolva:

(a)

$$y' + xy = x, \quad y(0) = 2.$$

(b)

$$y'' + 8y' + 16y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

(c)

$$y'' + 4y = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x > 1, \end{cases} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

(d)

$$a_{n+2} - 7a_{n+1} + 12a_n = 6, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 0.$$

(e)

$$y_1' = 3y_1 + 4y_2, \quad y_2' = -y_1 + 3y_2, \quad y_1(0) = 1 \quad y_2(0) = 0.$$

(f)

$$a_{n+1} = 2a_n + b_n, \quad b_{n+1} = 2b_n, \quad a_0 = 0, \quad b_0 = 1.$$

2. A função $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz

$$y'' + xy' + \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)y = 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Calcule $y''(0)$, $y'''(0)$ e $y''''(0)$.

3. Encontre uma matriz real X tal que

$$e^X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. A função $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz

$$y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n,$$

onde

$$a_{n+2} = - \frac{2}{(n+1)(n+2)} a_n, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1.$$

- (a) Encontre constantes b e c tais que $y'' + by' + cy = 0$.
- (b) Encontre uma fórmula para y em função de x .

5. Considere a equação

$$y'' + by' + y = 0$$

onde $b > 0$ é um parâmetro real.

Determine para quais valores de b existe alguma solução não nula y da equação tal que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0.$$

6. Uma partícula de massa m está submetida a uma força repulsiva proporcional à sua distância à origem, sempre apontando portanto na direção oposta à origem, com constante de proporcionalidade k . No tempo $t = 0$, sua velocidade é nula e sua posição é s_0 . Calcule a posição s da partícula em função de t .