P1 de Equações diferenciais e de diferenças

MAT 1154 — 2005.1

Data: 2 de abril de 2005

Nome:______________________________ Matrícula:__________

Assinatura:__________________________ Turma:__________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	1.5		
1b	1.5		
2a	1.0		
2b	1.0		
3	2.0		
4a	1.0		
4b	2.0		
Total	10.0		

Instruções

- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta.
- Você tem direito a uma folha de consulta.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Resolva os problemas de valor inicial abaixo:

   (a)
$$y' - 2\frac{y}{x} = x^2, \quad y(1) = 2.$$

   Solução:
   A equação homogênea $y_h' - 2\frac{y_h}{x} = 0$ é equivalente a $\int y_h^{-1} dy_h = 2\int x^{-1}dx$ donde $y_h = cx^2$.
   Para obter uma solução particular substituimos $y = x^2 z$ obtendo $2xz + x^2 z' - 2xz = x^2$ donde $z' = 1$ e $z = x + c$. Assim, a solução geral da equação é $y = x^3 + cx^2$.
   Substituindo, $y(1) = 1 + c = 2$ donde $c = 1$. Assim,
$$y = x^3 + x^2.$$

   (b)
$$y'' - 7y' + 12y = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

   Solução:
   A equação associada é $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$ que tem raízes $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 4$. Assim a solução geral da equação homogênea é $y_h = C_1 e^{3t} + C_2 e^{4t}$.
   Vamos testar se existe uma solução particular constante: $y_p = c$ implica $y_p'' - 7y_p' + 12y_p = 12c = 1$ donde $y_p = \frac{1}{12}$ é solução particular. A solução geral é $y(t) = \frac{1}{12} + C_1 e^{3t} + C_2 e^{4t}$. Substituindo temos $y(0) = \frac{1}{12} + C_1 + C_2 = 0$ e $y'(0) = 3C_1 + 4C_2 = 0$ donde $C_1 = -\frac{1}{3}$, $C_2 = \frac{1}{4}$ e portanto a solução é
$$y(t) = \frac{1}{12} - \frac{1}{3}e^{3t} + \frac{1}{4}e^{4t}.$$

2. Resolva as equações de diferenças abaixo:

(a)

$$y_{n+1} - 2y_n = n, \quad y_0 = 0.$$

Solução:

A equação homogênea é $y_{n+1} - 2y_n$, com solução $y_n = C2^n$.
Vamos procurar uma solução particular da forma $y_n = an + b$.
Substtuindo na equação temos $an + a + b - 2an - 2b = n$ donde $a = b = -1$ e encontramos a solução particular $y_n = -n - 1$.
Assim a solução geral é $y_n = C2^n - n - 1$. Substituindo temos $y_0 = C - 1 = 0$ donde $C = 1$ e a solução é

$$y_n = 2^n - n - 1.$$

(b)

$$y_{n+2} + 5y_{n+1} + 6y_n = 0, \quad y_0 = 0, y_1 = 1.$$

Solução:

A equação associada é $\lambda^2 + 5\lambda + 6$ que tem raízes $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$.
Assim a solução geral é $y_n = C_1(-2)^n + C_2(-3)^n$. Substituindo temos $y_0 = C_1 + C_2 = 0$ e $y_1 = -2C_1 - 3C_2 = 1$ donde $C_1 = 1$, $C_2 = -1$ e a solução é

$$y_n = (-2)^n - (-3)^n.$$

3. Considere os quatro campos de direções desenhados na próxima página. Eles correspondem a equações diferenciais da forma $y' = f(x, y)$. Cada desenho mostra o quadrado de vértices $(\pm 2, \pm 2)$ e o centro de cada desenho é a origem do plano xy. Considere também as seguintes oito equações diferenciais.

   1. $y' = x + y$
   2. $y' = x - y$
   3. $y' = x/y$
   4. $y' = -x/y$
   5. $y' = y/x$
   6. $y' = -y/x$
   7. $y' = x^2 + y^2$
   8. $y' = -x^2 y$

   Cada um dos quatro desenhos corresponde a uma das oito equações dadas. Identifique as correspondências.

   Solução:

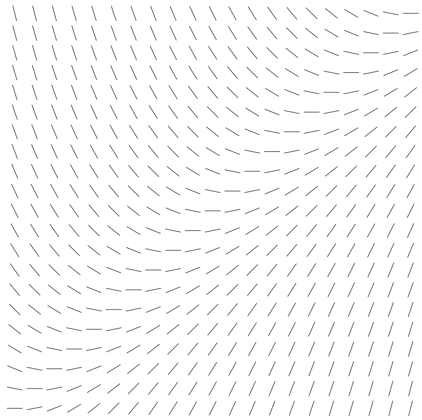
   A correspondência correta é: a2, b8, c6, d5. Vejamos uma possível maneira de eliminar as outras possibilidades.

   O campo (a) assume tanto sinais positivos quanto negativos no primeiro quadrante. Os campos (1), (3), (5) e (7) são sempre positivos neste quadrante e os campos (4), (6) e (8) são sempre negativos; só resta a possibilidade (2).

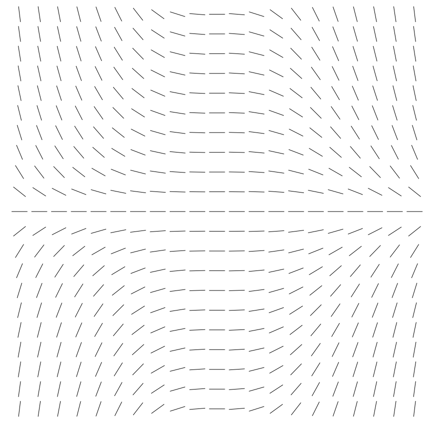
   O campo (b) não tem singularidades (retas verticais) e anula-se tanto no eixo x quanto no eixo y. Os campos (1), (2) e (7) assumem valores não nulos no ponto $(1, 0)$. Os campos (3) e (4) têm singularidades no eixo x e os campos (5) e (6) têm singularidades do eixo y. Só resta a possibilidade (8).

   O campo (c) é zero no eixo x, tem singularidades no eixo y, é positivo nos quadrantes 2 e 4 e negativo nos quadrantes 1 e 3. Os campos (1), (2), (7) e (8) não têm singularidades. Os campos (3) e (5) são positivos nos quadrantes 1 e 3 e negativos nos quadrantes 2 e 4. O campo (4) tem singularidades do eixo x e zeros no eixo y. Só resta a possibilidade (6).

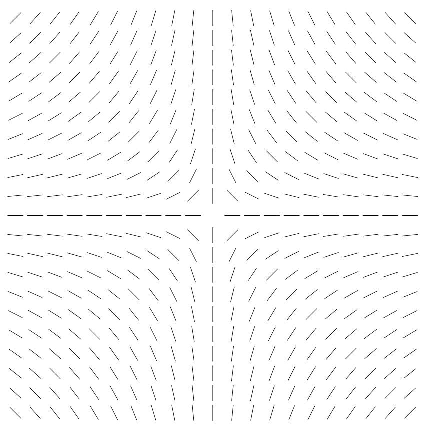
   O campo (d) é zero no eixo x, tem singularidades no eixo y, é positivo nos quadrantes 1 e 3 e negativo nos quadrantes 2 e 4. Os campos (1), (2), (7) e (8) não têm singularidades. Os campos (4) e (6) são negativos nos quadrantes 1 e 3 e positivos nos quadrantes 2 e 4. O campo (3) tem singularidades do eixo x e zeros no eixo y. Só resta a possibilidade (5).



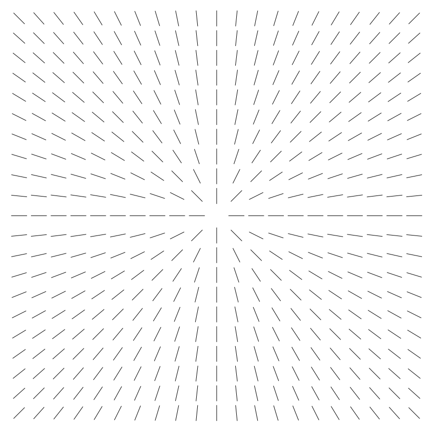
(a)



(b)



(c)



(d)

4. A função $y_p(t) = t^{20}$ é solução da equação

$$y'' - 4y' + 5y = h(t).$$

   (a) Encontre a função $h(t)$.

   (b) Resolva o problema de valor inicial

$$y'' - 4y' + 5y = h(t), \quad y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

Solução:

Para o item (a), escreva $h(t) = y_p'' - 4y_p' + 5y_p = 380t^{18} - 80t^{19} + 5t^{20}$.

Para o item (b), vamos primeiro resolver a equação homogênea. Sua equação associada é $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$ que tem raízes $2 \pm i$ (onde $i = \sqrt{-1}$). Assim a solução geral da equação homogênea é $y_h = c_1 e^{2t} \cos t + c_2 e^{2t} \operatorname{sen} t$. Já temos do enunciado a solução particular $y_p = t^{20}$. Assim a solução geral é

$$y(t) = t^{20} + c_1 e^{2t} \cos t + c_2 e^{2t} \operatorname{sen} t.$$

Substituindo temos $y(0) = c_1 = 1$. Derivando temos

$$y'(t) = 20t^{19} + 2c_1 e^{2t} \cos t - c_1 e^{2t} \operatorname{sen} t + 2c_2 e^{2t} \operatorname{sen} t + c_2 e^{2t} \cos t$$

donde $y'(0) = 2c_1 + c_2 = 0$ donde $c_2 = -2$. Assim

$$y(t) = t^{20} + e^{2t} \cos t - 2e^{2t} \operatorname{sen} t.$$