P2 de Equações diferenciais e de diferenças
MAT 1154 — 2005.1
Data: 14 de maio de 2005

Nome:________________________ Matrícula:__________
Assinatura:______________________ Turma:__________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	2.0		
1b	2.0		
2	2.0		
3	2.0		
4	2.0		
Total	10.0		

Instruções

- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta.
- Você tem direito a uma folha de consulta.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Resolva os problemas de valor inicial abaixo:

   (a)
$$y_1' = 4y_1 - 2y_2, \quad y_2' = 2y_1 + 4y_2, \quad y_1(0) = 4, \quad y_2(0) = 3.$$

Solução:

O sistema pode ser reescrito como $y' = Ay$, $y(0) = (4, 3)$ para

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

donde $y(t) = e^{tA}y(0)$.
Temos $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 20$, donde os autovalores são $\lambda = 4 \pm 2i$.
Assim $e^{tA} = \alpha A + \beta I$ desde que

$$e^{4t}(\cos(2t) \pm i\,\mathrm{sen}(2t)) = \alpha(4 \pm 2i) + \beta$$

donde

$$4\alpha + \beta = e^{4t}\cos(2t), \quad 2\alpha = e^{4t}\,\mathrm{sen}(2t),$$

$$\alpha = \frac{1}{2}e^{4t}\,\mathrm{sen}(2t), \quad \beta = e^{4t}(\cos(2t) - 2\,\mathrm{sen}(2t)),$$

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{4t}\cos(2t) & -e^{4t}\,\mathrm{sen}(2t) \\ e^{4t}\,\mathrm{sen}(2t) & e^{4t}\cos(2t) \end{pmatrix},$$

$$y_1(t) = e^{4t}(4\cos(2t) - 3\,\mathrm{sen}(2t)), \quad y_2(t) = e^{4t}(3\cos(2t) + 4\,\mathrm{sen}(2t)).$$

(b)

$$y_1' = 2y_1 + 3y_2, \quad y_2' = 4y_2, \quad y_1(0) = 5, \quad y_2(0) = 7.$$

Solução:

Resolvendo a segunda equação temos $y_2(t) = 7e^{4t}$. Assim

$$y_1' - 2y_1 = 21e^{4t}, \quad y_1(0) = 5.$$

A solução da equação homogênea associada é $y_{1,h}(t) = C_h e^{2t}$. Vamos procurar uma solução particular da forma $y_{1,p} = C_p e^{4t}$. Substituindo na equação temos

$$(4C_p - 2C_p)e^{4t} = 21e^{4t}$$

donde $C_p = 21/2$ e $y_1(t) = C_h e^{2t} + (21/2)e^{4t}$. Como $y_1(0) = 5$ temos $C_1 = -11/2$ donde

$$y_1(t) = -\frac{11}{2}e^{2t} + \frac{21}{2}e^{4t}.$$

2. Resolva o sistema de equações de diferenças abaixo:

$$a_{n+1} = 3a_n - b_n, \quad b_{n+1} = a_n + b_n, \quad a_0 = 1, \quad b_0 = 0.$$

Solução:

Temos
$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Temos $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$ donde $\lambda = 2$ é autovalor duplo. Assim $A^n = \alpha A + \beta I$ desde que $2^n = 2\alpha + \beta$, $n2^{n-1} = \alpha$. Assim

$$A^n = n2^{n-1}A + (1-n)2^n I = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 2+n & -n \\ n & 2-n \end{pmatrix},$$

$$a_n = 2^{n-1}(2+n), \quad b_n = 2^{n-1}n.$$

3. Considere os quatro diagramas de fase desenhados na próxima página. Cada um deles mostra as curvas $(y_1(t), y_2(t))$ onde $y = (y_1, y_2)$ são soluções da equação $y' = Ay$ para alguma matriz 2×2 real A. As seis matrizes encontram-se entre as oito opções abaixo.

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

   (e) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

   (f) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

   (g) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

   (h) $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

   Para cada um dos diagramas, identifique a matriz correspondente.

   Solução:

   Os autovalores das matrizes dadas são

   (a) 1 e -1: sela,

   (b) 1, autovalor duplo, não diagonalizável: repulsor com figura S,

   (c) $\pm\sqrt{5}\, i$: órbitas periódicas,

   (d) 5 e -1: sela,

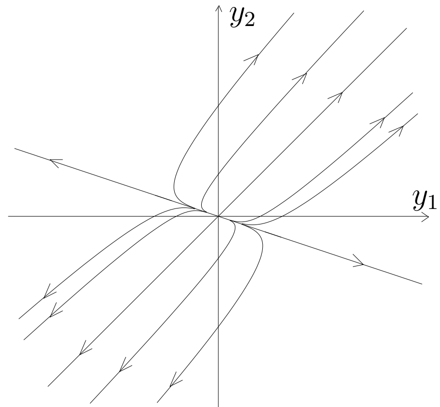
   (e) $1 \pm 2i$: espiral para fora,

   (f) $-1 \pm 2i$: espiral para dentro,

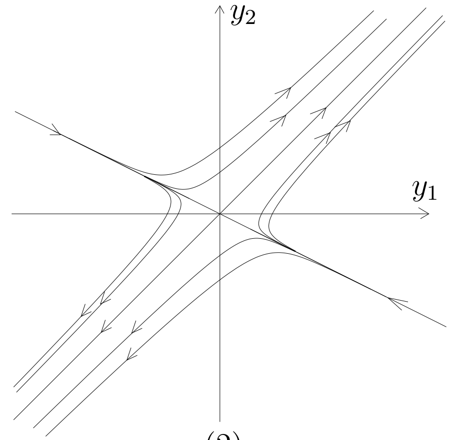
   (g) 5 e 1: repulsor com duas direções invariantes,

   (h) -5 e -1: atrator com duas direções invariantes.

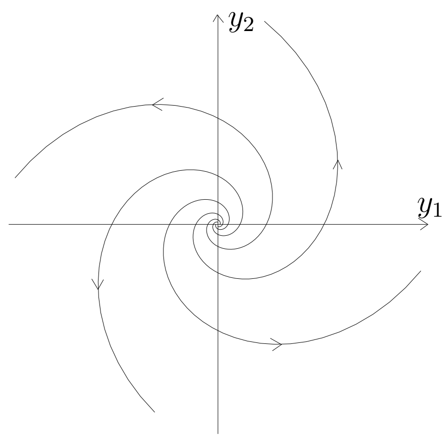
   Vejamos agora as figuras...



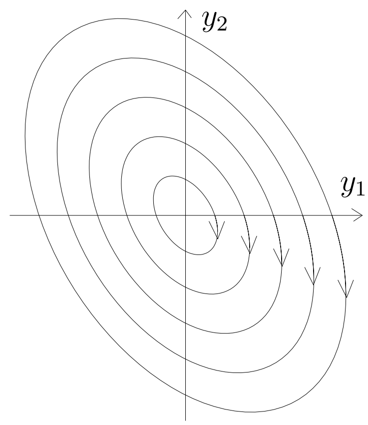
(1)



(2)



(3)



(4)

Continuação da solução:

A figura (1) só pode ser (g). (2) poderia ser (a) ou (d), mas (a) tem autovetor $(1, 0)$, o que não corresponde à figura, donde (2) deve ser (d). (3) só pode ser (e) e (4) só pode ser (c).

4. As funções $y_1, y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazem

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad \lim_{t \to +\infty} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dado que $y_1(0) = 1$, calcule $y_2(0)$.

Solução:

Seja A a matriz do enunciado. Temos $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 4$, donde os autovalores são $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -1$. O autovetor correspondente a $\lambda_2 = -1$ é $v_2 = (a, b)$ onde

$$2a + 3b = -a, \quad 2a + b = -b$$

ou $a + b = 0$, donde podemos tomar $v_2 = (1, -1)$. Assim, se $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ é solução de $y' = Ay$ temos

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 0 \quad \iff \quad y(0) \text{ é paralelo a } v_2 = (1, -1).$$

Como sabemos que $y_1(0) = 1$ temos $y_2(0) = -1$.