P3 de Equações diferenciais e de diferenças

MAT 1154 — 2005.1

Data: 18 de junho de 2005

Nome:____ Matrícula:__________

Assinatura:____________________________________ Turma:__________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	2.5		
2	2.5		
3a	1.0		
3b	1.0		
3c	1.0		
4a	1.0		
4b	1.0		
Total	10.0		

Instruções

- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta.
- Você tem direito a uma folha de consulta.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Resolva o problema de valor inicial abaixo:

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 1 - u_1(t), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Solução:

Vamos aplicar a transformada de Laplace aos dois lados da equação:

$$s^2Y(s) + 2sY(s) + 5Y(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s}$$

ou

$$Y(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s(s^2 + 2s + 5)} = (1 - e^{-s}) \left(\frac{A}{s} + \frac{B(s+1) + 2C}{(s+1)^2 + 2^2} \right)$$

Expandindo, temos $1 = (A + B)s^2 + (2A + B + 2C)s + 5A$ donde $A + B = 0$, $2A + B + 2C = 0$, $5A = 1$. Resolvendo o sistema, temos $A = 1/5$, $B = -1/5$, $C = -1/10$ donde

$$Y(s) = (1 - e^{-s}) \left(\frac{1}{5}\,\frac{1}{s} - \frac{1}{5}\,\frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} - \frac{1}{10}\,\frac{2}{(s+1)^2 + 2^2} \right).$$

Aplicando Laplace inversa,

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\,e^{-t}\cos 2t - \frac{1}{10}\,e^{-t}\,\mathrm{sen}\,2t \\ &\quad - u_1(t)\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\,e^{-(t-1)}\cos 2(t-1) - \frac{1}{10}\,e^{-(t-1)}\,\mathrm{sen}\,2(t-1) \right). \end{aligned}$$

2. Resolva o problema de valor inicial abaixo:

$$y''(t) + y(t) = 2\delta(t-\pi) + \delta(t-2\pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Simplifique a resposta e faça um esboço do gráfico de y.

Solução:

Aplicando a transformada de Laplace, temos

$$s^2 Y(s) - 1 + Y(s) = 2e^{-\pi s} + e^{-2\pi s}$$

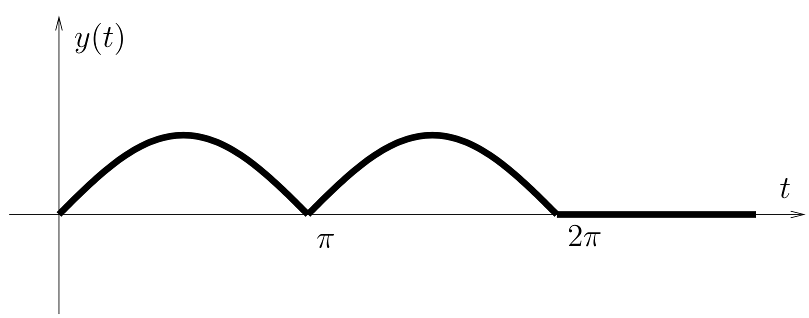
donde

$$Y(s) = \frac{1 + 2e^{-\pi s} + e^{-2\pi s}}{1 + s^2}$$

e

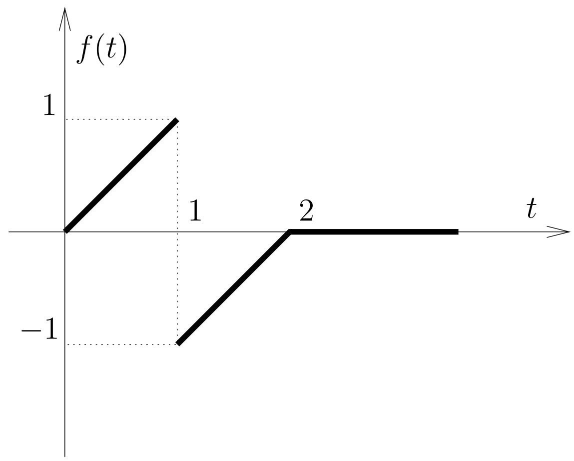
$$\begin{aligned} y(t) &= \operatorname{sen} t + 2u_\pi(t) \operatorname{sen}(t-\pi) + u_{2\pi}(t) \operatorname{sen}(t - 2\pi) \\ &= (1 - 2u_\pi(t) + u_{2\pi}(t)) \operatorname{sen} t \\ &= \begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0 \le t \le \pi, \\ -\operatorname{sen} t, & \pi \le t \le 2\pi, \\ 0, & t \ge 2\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

O gráfico de $y(t)$ é:



3. Em cada um dos itens abaixo é dada uma função f. Calcule a transformada de Laplace F de cada uma destas funções.

   (a) A função f tem o gráfico abaixo:



Solução:

Temos $f(t) = t - 2u_1(t) - u_2(t)(t-2)$ donde

$$F(s) = \frac{1}{s^2} - 2\,\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s^2}.$$

(b)

$$f(t) = \begin{cases} t(2-t), & 0 \le t \le 2 \\ 0, & t \ge 2. \end{cases}$$

Solução:

Temos

$$\begin{aligned} f(t) &= (1 - u_2(t))t(2-t) \\ &= -t^2 + 2t + u_2(t)(t-2)^2 + 2u_2(t)(t-2). \end{aligned}$$

donde

$$F(s) = -\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{2e^{-2s}}{s^3} + \frac{2e^{-2s}}{s^2}.$$

(c)

$$f(t) = \int_0^t (t-\tau)^3 \cos(3\tau)\, d\tau$$

Solução:

A função f é a convolução $f = g * h$ de $g(t) = t^3$ por $h(t) = \cos(3t)$.
Temos

$$G(s) = \frac{6}{s^4}, \quad H(s) = \frac{s}{s^2+9}$$

donde, como $F(s) = G(s)H(s)$,

$$F(s) = \frac{6}{s^3(s^2+9)}.$$

4. Em cada um dos itens abaixo é dada uma função F. Encontre f, a transformada de Laplace inversa de F.

(a)

$$F(s) = \frac{s^2 + s - 4}{s^3 - 4s}$$

Solução:

Escreva

$$F(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+2} = \frac{A(s-2)(s+2) + Bs(s+2) + Cs(s-2)}{s^3 - 4s}.$$

Substituindo s por 0, 2 e -2, respectivamente, temos $A = 1$, $B = 1/4$, $C = -1/4$. Assim

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{s-2} - \frac{1}{4}\,\frac{1}{s+2}$$

donde

$$f(t) = 1 + \frac{e^{2t}}{4} - \frac{e^{-2t}}{4}.$$

(b)

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

Solução:

Pela tabela,

$$f(t) = \frac{t^2 e^{-t}}{2}.$$