P4 de Equações diferenciais e de diferenças
MAT 1154 — 2005.1
Data: 2 de julho de 2005

Nome:____ Matrícula:____________
Assinatura:____________________________________ Turma:____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	2.0		
1b	2.0		
1c	2.0		
2	2.0		
3a	1.0		
3b	1.0		
Total	10.0		

Instruções

- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta.
- Você tem direito a uma folha de consulta.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Resolva os problemas de valor inicial abaixo:

   (a)
$$y''(t) - 4y(t) = 12\,t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -3.$$

Solução 1:

Vamos primeiro resolver a equação homogênea $y_h''(t) - 4y_h(t) = 0$. A equação associada é $\lambda^2 - 4 = 0$ que tem raízes $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$. Assim

$$y_h(t) = C_1\, e^{2t} + C_2\, e^{-2t}.$$

Vamos agora encontrar uma solução particular pelo método dos coeficientes a determinar: vejamos se existe uma solução da forma $y_p(t) = a\,t + b$. Substituindo temos $0 - 4(a\,t + b) = 12\,t$ ou $(12 + 4a)t + 4b = 0$ donde $a = -3$, $b = 0$ e temos a solução particular $y_p(t) = -3\,t$. Assim, a solução geral é

$$y(t) = -3\,t + C_1\, e^{2t} + C_2\, e^{-2t}.$$

Temos $y(0) = C_1 + C_2 = 1$, $y'(0) = -3 + 2\,C_1 - 2\,C_2 = -3$ donde $C_1 = C_2 = 1/2$ e portanto

$$y(t) = -3\,t + \frac{1}{2}\, e^{2t} + \frac{1}{2}\, e^{-2t}.$$

Solução 2:

Aplique a transformada de Laplace para obter

$$s^2 Y(s) - s + 3 - 4Y(s) = \frac{12}{s^2}$$

donde

$$Y(s) = \frac{12}{s^2(s^2 - 4)} + \frac{s}{s^2 - 4} - \frac{3}{s^2 - 4}.$$

Expandindo a primeira fração em frações parciais temos

$$Y(s) = -\frac{3}{s^2} + \frac{s}{s^2 - 4}$$

donde

$$y(t) = -3\,t + \cosh 2t.$$

(b)

$$y''(t) + 4y(t) = -4u_{\pi/2}(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Solução:

Aplicando a transformada de Laplace temos

$$s^2 Y(s) - s + 4Y(s) = -4\,\frac{e^{-\pi s/2}}{s}$$

donde

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+4} - 4\,\frac{e^{-\pi s/2}}{s(s^2+4)}.$$

Expandindo a segunda fração em frações parciais temos

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+4} + \frac{e^{-\pi s/2}}{s^2+4} - \frac{e^{-\pi s/2}}{s}$$

donde

$$\begin{aligned} y(t) &= \cos(2t) + u_{\pi/2}(t)\cos(2(t-(\pi/2))) - u_{\pi/2}(t) \\ &= (1 - u_{\pi/2}(t))\cos(2t) - u_{\pi/2}(t) \\ &= \begin{cases} \cos(2t), & t \leq \pi/2 \\ -1, & t \geq \pi/2 \end{cases} \end{aligned}$$

(c)

$$y'(t) = Ay(t), \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Solução:

Expandindo, temos $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$ donde o único autovalor é $\lambda = 1$. Assim, se $f(x) = e^{tx}$ e $p(x) = ax + b$ temos $f(A) = e^{tA} = p(A) = aA + bI$ desde que $f(1) = e^t = p(1) = a + b$ e $f'(1) = te^t = p'(1) = a$, ou seja, desde que $a = te^t$ e $b = (1-t)e^t$. Assim

$$e^{tA} = te^t A + (1-t)e^t I = \begin{pmatrix} (1+t)e^t & te^t \\ -te^t & (1-t)e^t \end{pmatrix}.$$

Temos $y(t) = e^{tA}y(0)$ donde

$$y(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}.$$

2. Sabendo que

$$y'(t) - 2y(t) = e^{-t}, \quad \lim_{t\to+\infty} y(t) = 0,$$

determine $y(0)$.

Solução:

Vamos primeiro resolver a equação. A solução homogênea é $y_h(t) = C\,e^{2t}$ e uma soluçao particular (que pode facilmente ser obtida pelo método dos coeficientes a determinar) é $y_p = -\frac{1}{3}\,e^{-t}$. Assim a solução geral é

$$y(t) = -\frac{1}{3}\,e^{-t} + C\,e^{2t}.$$

Como $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$ devemos ter $C = 0$ donde $y(t) = -\frac{1}{3}\,e^{-t}$ e $y(0) = -\frac{1}{3}$.

3. A seqüência (y_n) satisfaz

$$y_{n+2} = 2y_{n+1} + y_n, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = 1.$$

(a) Calcule y_n.

(b) Calcule

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n}.$$

Solução:

(a) A equação associada à recursão é $\alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0$, com raízes $\alpha_1 = 1 + \sqrt{2}$ e $\alpha_2 = 1 - \sqrt{2}$. Assim $y_n = C_1(1+\sqrt{2})^n + C_2(1-\sqrt{2})^n$. Substituindo, temos $y_0 = C_1 + C_2 = 0$, $y_1 = (1+\sqrt{2})C_1 + (1-\sqrt{2})C_2 = 1$ donde $C_1 = 1/(2\sqrt{2})$, $C_2 = -1/(2\sqrt{2})$ e

$$y_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}.$$

(b) Substituindo,

$$\begin{aligned} \frac{y_{n+1}}{y_n} &= \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}}{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n} \\ &= (1+\sqrt{2})\,\frac{1 - c^{n+1}}{1 - c^n} \end{aligned}$$

onde $c = (1-\sqrt{2})/(1+\sqrt{2})$, $-1 < c < 0$. Assim,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = (1+\sqrt{2})\,\frac{1 - \lim_{n \to +\infty} c^{n+1}}{1 - \lim_{n \to +\infty} c^n} = 1 + \sqrt{2}.$$