

P2 de Equações diferenciais e de diferenças

MAT 1154 — 2005.2

Data: 8 de outubro de 2005

Nome: _____ Matrícula: _____

Assinatura: _____ Turma: _____

| Questão | Valor | Nota | Revisão |
|---------|-------|------|---------|
| 1a | 2.0 | | |
| 1b | 2.0 | | |
| 2 | 2.0 | | |
| 3 | 2.0 | | |
| 4a | 1.0 | | |
| 4b | 1.0 | | |
| Total | 10.0 | | |

Instruções

- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta.
- Você tem direito a uma folha de consulta.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Resolva o problema de valor inicial abaixo:

(a)

$$y_1' = 5y_1 - y_2, \quad y_2' = y_1 + 3y_2, \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

(b)

$$y' = Ay + b, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. Resolva o sistema de equações de diferenças abaixo:

$$a_{n+1} = 7a_n + b_n, \quad b_{n+1} = a_n + 7b_n, \quad a_0 = 1, \quad b_0 = -1.$$

3. Considere os quatro diagramas de fase desenhados na próxima página. Cada um deles mostra as curvas $(y_1(t), y_2(t))$ onde $y = (y_1, y_2)$ são soluções da equação $y' = Ay$ para alguma matriz 2×2 real A . As quatro matrizes encontram-se entre as oito opções abaixo.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

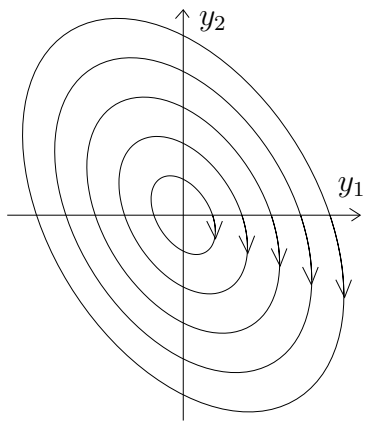
(e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

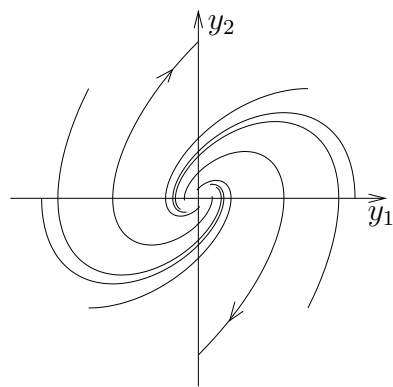
(g) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

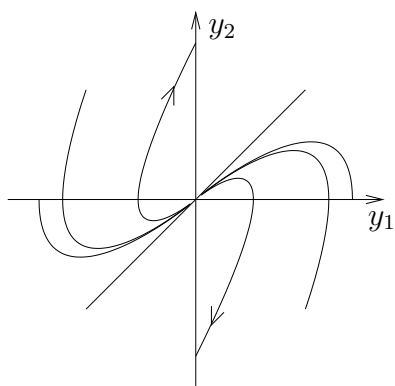
Para cada um dos diagramas, identifique a matriz correspondente.



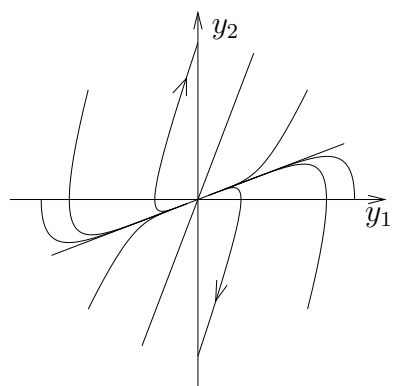
(1)



(2)



(3)



(4)

4. A função $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisfaz a equação diferencial $y'(t) = Ay(t)$. Sabemos que:

1. os autovalores de A são $\pm 2i$;
2. $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y'(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Com estes dados, determine:

- (a) a matriz A ;
- (b) a função $y(t)$.