P2 de Equações diferenciais e de diferenças
MAT 1154 — 2005.2
Data: 8 de outubro de 2005

Nome:______________________________ Matrícula:____________
Assinatura:__________________________ Turma:____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	2.0		
1b	2.0		
2	2.0		
3	2.0		
4a	1.0		
4b	1.0		
Total	10.0		

Instruções

- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta.
- Você tem direito a uma folha de consulta.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Resolva o problema de valor inicial abaixo:

   (a)
$$y_1' = 5y_1 - y_2, \quad y_2' = y_1 + 3y_2, \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

   Solução:

   Podemos escrever $y' = Ay$,
$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   e $y(t) = \exp(tA) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; resta calcular $\exp(tA)$. Temos
$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 5 & 1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda - 4)^2$$

   donde $\exp(tA) = aA + bI$ desde que $4a + b = e^{4t}$, $a = te^{4t}$ donde $b = (1 - 4t)e^{4t}$ e
$$\exp(tA) = e^{4t} \begin{pmatrix} 1 + t & -t \\ t & 1 - t \end{pmatrix}, \quad y(t) = e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   ou
$$y_1(t) = y_2(t) = e^{4t}.$$

(b)

$$y' = Ay + b, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Solução:

A solução da equação homogênea associada $y_h' = Ay_h$ é $y_h(t) = \exp(tA)y_0$ e verificamos facilmente que

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Podemos encontrar uma solução particular y_p pelo método dos coeficientes a determinar: vamos procurar uma solução constante $y_p(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Substituindo, temos $y_p(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Assim a solução geral é

$$y(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} y_0;$$

no nosso caso temos $y_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ donde

$$y(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 2\cos t + 2\operatorname{sen} t \\ -3 + 2\cos t - 2\operatorname{sen} t \end{pmatrix}.$$

2. Resolva o sistema de equações de diferenças abaixo:

$$a_{n+1} = 7a_n + b_n, \quad b_{n+1} = a_n + 7b_n, \quad a_0 = 1, \quad b_0 = -1.$$

Solução:

Seja $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$. Temos $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 14\lambda + 48$ donde os autovalores de A são $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 8$. Assim

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8^n + 6^n & 8^n - 6^n \\ 8^n - 6^n & 8^n + 6^n \end{pmatrix}.$$

Assim

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8^n + 6^n & 8^n - 6^n \\ 8^n - 6^n & 8^n + 6^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ou

$$a_n = 6^n, \quad b_n = -6^n.$$

3. Considere os quatro diagramas de fase desenhados na próxima página. Cada um deles mostra as curvas $(y_1(t), y_2(t))$ onde $y = (y_1, y_2)$ são soluções da equação $y' = Ay$ para alguma matriz 2×2 real A. As quatro matrizes encontram-se entre as oito opções abaixo.

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

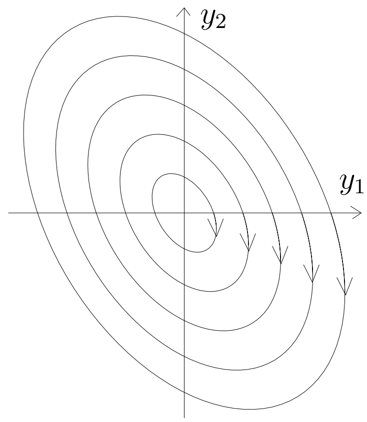
   (e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

   (f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

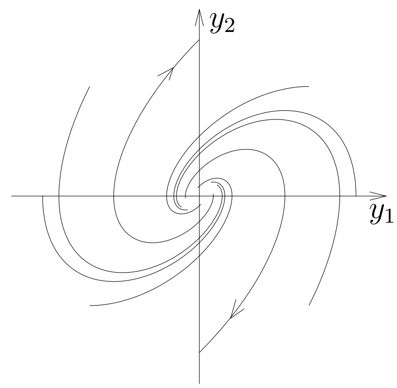
   (g) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

   (h) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

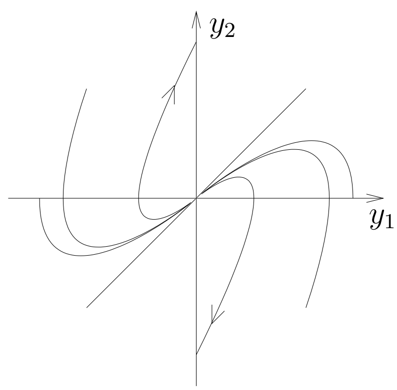
   Para cada um dos diagramas, identifique a matriz correspondente.



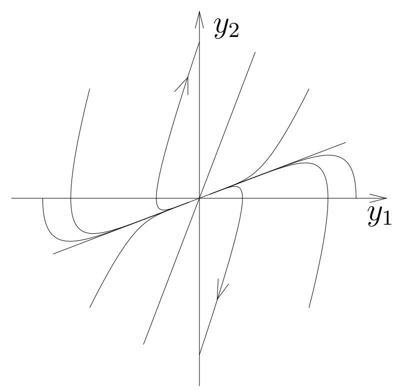
(1)



(2)



(3)



(4)

4. A função $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ satisfaz a equação diferencial $y'(t) = Ay(t)$. Sabemos que:

   1. os autovalores de A são $\pm 2i$;
   2. $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y'(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Com estes dados, determine:

   (a) a matriz A;

   (b) a função $y(t)$.

   Solução:

   (a) Temos que $y'(0) = Ay(0)$ donde

   $$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   e portanto

   $$A = \begin{pmatrix} 3 & b \\ 1 & d \end{pmatrix}.$$

   Assim $3 + d = 0$ e $3d - b = 4$ donde

   $$A = \begin{pmatrix} 3 & -13 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

   (b) Temos

   $$y_1(t) = c_{11}\cos(2t) + c_{12}\operatorname{sen}(2t), \quad y_2(t) = c_{21}\cos(2t) + c_{22}\operatorname{sen}(2t)$$

   donde

   $$y_1'(t) = -2c_{11}\operatorname{sen}(2t) + 2c_{12}\cos(2t), \quad y_2'(t) = -2c_{21}\operatorname{sen}(2t) + 2c_{22}\cos(2t)$$

   e

   $$y_1(0) = c_{11} = 1, \quad y_2(0) = c_{21} = 0,$$
   $$y_1'(0) = 2c_{12} = 3, \quad y_2'(0) = 2c_{22} = 1$$

   donde

   $$y(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\cos(2t) + 3\operatorname{sen}(2t) \\ \operatorname{sen}(2t) \end{pmatrix}.$$