P3 de Equações diferenciais e de diferenças
MAT 1154 — 2005.2
Data: 19 de novembro de 2005

Nome: GABARITO ______________________ Matrícula: ____________
Assinatura: ______________________ Turma: ____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	2.5		
2	2.5		
3a	1.0		
3b	1.0		
3c	1.0		
4a	1.0		
4b	1.0		
Total	10.0		

Instruções

- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta.
- Você tem direito a uma folha de consulta.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Resolva o problema de valor inicial abaixo:

$$y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = u_1(t)\, e^{t-1}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Solução:

Aplicando a transformada de Laplace aos dois lados da equação:

$$s^2 Y(s) - 1 - 5sY(s) + 6Y(s) = \frac{e^{-s}}{s-1}$$

donde

$$Y(s) = \frac{1 + \frac{e^{-s}}{s-1}}{s^2 - 5s + 6} = \frac{1}{(s-2)(s-3)} + \frac{e^{-s}}{(s-1)(s-2)(s-3)}.$$

Vamos fazer a decomposição em frações parciais:

$$\frac{1}{(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-3} = \frac{A(s-3) + B(s-2)}{(s-2)(s-3)}$$

$$\Rightarrow \quad A = -1, B = 1.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)} &= \frac{C}{s-1} + \frac{D}{s-2} + \frac{E}{s-3} \\ &= \frac{C(s-2)(s-3) + D(s-1)(s-3) + E(s-1)(s-2)}{(s-1)(s-2)(s-3)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad C = 1/2, D = -1, E = 1/2.$$

Assim

$$Y(s) = -\frac{1}{s-2} + \frac{1}{s-3} + \frac{1}{2}\frac{e^{-s}}{s-1} - \frac{e^{-s}}{s-2} + \frac{1}{2}\frac{e^{-s}}{s-3}$$

donde

$$\begin{aligned} y(t) &= -e^{2t} + e^{3t} + \frac{1}{2}\, u_1(t) e^{t-1} - u_1(t) e^{2(t-1)} + \frac{1}{2}\, u_1(t) e^{3(t-1)} \\ &= \begin{cases} -e^{2t} + e^{3t}, & t \le 1, \\ \frac{e^{-1}}{2} e^t - (1 + e^{-2}) e^{2t} + \frac{2+e^{-3}}{2} e^{3t}, & t \ge 1, \end{cases} \end{aligned}$$

2. Resolva o problema de valor inicial abaixo:

$$y''(t) - y(t) = \delta(t-1) - (e + e^{-1})\,\delta(t-2) + \delta(t-3), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Simplifique a resposta e calcule $y(4)$.

Solução:

Aplicando Laplace dos dois lados, temos

$$s^2 Y(s) - Y(s) = e^{-s} - (e + e^{-1})\, e^{-2s} + e^{-3s}$$

donde

$$Y(s) = \frac{e^{-s}}{s^2 - 1} - (e + e^{-1})\,\frac{e^{-2s}}{s^2 - 1} + \frac{e^{-3s}}{s^2 - 1}$$

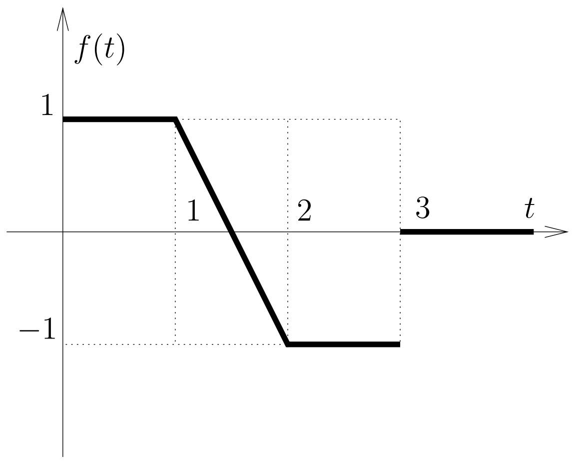
e

$$\begin{aligned} y(t) &= u_1(t)\ \operatorname{senh}(t-1) - (e + e^{-1})\, u_2(t)\ \operatorname{senh}(t-2) + u_3(t)\ \operatorname{senh}(t-3) \\ &= u_1(t)\,\frac{e^{t-1} - e^{-t+1}}{2} - (e + e^{-1})\, u_2(t)\,\frac{e^{t-2} - e^{-t+2}}{2} + u_3(t)\,\frac{e^{t-3} - e^{-t+3}}{2} \\ &= (u_1(t) - u_2(t))\,\frac{e^{t-1} - e^{-t+1}}{2} - (u_2(t) - u_3(t))\,\frac{e^{t-3} - e^{-t+3}}{2} \\ &= \begin{cases} 0, & t \leq 1, \\ \operatorname{senh}(t-1), & 1 \leq t \leq 2, \\ -\operatorname{senh}(t-3), & 2 \leq t \leq 3, \\ 0, & t \geq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Em particular, $y(4) = 0$.

3. Em cada um dos itens abaixo é dada uma função f. Calcule a transformada de Laplace F de cada uma destas funções.

   (a) A função f tem o gráfico abaixo:



Solução:

Temos

$$f(t) = 1 + u_1(t)(-2(t-1)) + u_2(t)(2(t-2)) + u_3(t)$$

donde

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{2e^{-s}}{s^2} + \frac{2e^{-2s}}{s^2} + \frac{e^{-3s}}{s}.$$

(b)

$$f(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 \le t \le \pi/2 \\ 0, & t \ge \pi/2. \end{cases}$$

Solução:

Temos

$$f(t) = (1 - u_{\pi/2}(t))\cos(t) = \cos(t) + u_{\pi/2}(t)\,\mathrm{sen}(t - \pi/2)$$

donde

$$F(s) = \frac{s}{1+s^2} + \frac{e^{-\pi s/2}}{1+s^2} = \frac{s + e^{-\pi s/2}}{1+s^2}.$$

(c)

$$f(t) = \int_0^t e^{-2(t-\tau)}\,\cos(3\tau)\,d\tau$$

Solução:

Temos $f = g * h$, onde $g(t) = e^{-2t}$ e $h(t) = \cos(3t)$. Assim,

$$F(s) = G(s)H(s) = \frac{1}{s+2}\,\frac{s}{s^2+9} = \frac{s}{s^3 + 2s^2 + 9s + 18}.$$

4. Em cada um dos itens abaixo é dada uma função F. Encontre f, a transformada de Laplace inversa de F.

(a)

$$F(s) = \frac{5s^2 - 8}{s^4 - 5s^2 + 4}$$

Solução:

Temos $s^4 - 5s^2 + 4 = (s-1)(s+1)(s-2)(s+2)$ donde podemos fazer a decomposição em frações parciais

$$F(s) = \frac{5s^2 - 8}{s^4 - 5s^2 + 4} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-2} + \frac{D}{s+2};$$

resolvendo temos $A = 1/2$, $B = -1/2$, $C = 1$, $D = -1$:

$$F(s) = \frac{1}{2(s-1)} - \frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+2}$$

donde

$$f(t) = \frac{e^t}{2} - \frac{e^{-t}}{2} + e^{2t} - e^{-2t} = \operatorname{senh} t + 2 \operatorname{senh} 2t.$$

(b)

$$F(s) = \frac{1}{(s-2)^4}$$

Solução:

Pela tabela,

$$f(t) = \frac{t^3 e^{2t}}{6}.$$