P4 de Equações diferenciais e de diferenças

MAT 1154 — 2005.2

Data: 3 de dezembro de 2005

Nome: GABARITO________________________ Matrícula:__________

Assinatura:________________________ Turma:__________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	2.0		
1b	2.0		
1c	2.0		
2	2.0		
3	2.0		
Total	10.0		

Instruções

- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta.
- Você tem direito a uma folha de consulta.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Resolva os problemas de valor inicial abaixo:

   (a)
$$y''(t) + 4y(t) = e^{2t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Solução:

Solução da equação homogênea: $\lambda^2 + 4 = 0$ implica $\lambda = \pm 2i$ donde $y_h(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \operatorname{sen}(2t)$.
Solução particular (por coeficientes a determinar): Tome $y_p(t) = Ce^{2t}$. Temos $y_p'(t) = 2Ce^{2t}$, $y_p''(t) = 4Ce^{2t}$, $y_p''(t) + 4y_p(t) = 8Ce^{2t} = e^{2t}$ donde $C = 1/8$ e $y_p(t) = e^{2t}/8$.
Solução geral: Temos $y(t) = e^{2t}/8 + C_1 \cos(2t) + C_2 \operatorname{sen}(2t)$. Assim $y(0) = 1/8 + C_1 = 1$ e $y'(0) = 2/8 + 2C_2 = 0$. Resolvendo o sistema temos $C_1 = 7/8$, $C_2 = -1/8$.

$$y(t) = \frac{1}{8}e^{2t} + \frac{7}{8}\cos(2t) - \frac{1}{8}\operatorname{sen}(2t)$$

(b)

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = u_2(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Solução:

Aplicando a transformada de Laplace:

$$s^2Y(s) - s - 4sY(s) + 4 + 4Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s}$$

donde

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s-4}{s^2-4s+4} + \frac{e^{-2s}}{s(s^2-4s+4)} \\ &= \frac{1}{s-2} - 2\frac{1}{(s-2)^2} + \frac{1}{4}\frac{e^{-2s}}{s} - \frac{1}{4}\frac{e^{-2s}}{s-2} + \frac{1}{2}\frac{e^{-2s}}{(s-2)^2}. \end{aligned}$$

Aplicando a transformada inversa,

$$y(t) = e^{2t} - 2te^{2t} + \frac{1}{4}u_2(t)\left(1 - e^{2(t-2)} + 2(t-2)e^{2(t-2)}\right).$$

(c)

$$y'(t) = Ay(t), \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Solução:

Temos $y(t) = e^{tA}y(0)$; devemos calcular e^{tA}.
O polinômio característico de A é

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

donde os autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$.
Temos $e^{tA} = \alpha_t A + \beta_t$ onde

$$\begin{aligned} \alpha_t + \beta_t &= e^t \\ 3\alpha_t + \beta_t &= e^{3t} \end{aligned}$$

donde

$$\alpha_t = \frac{e^{3t} - e^t}{2}, \quad \beta_t = \frac{3e^t - e^{3t}}{2}, \quad e^{tA} = \begin{pmatrix} \frac{e^{3t}+e^t}{2} & \frac{e^{3t}-e^t}{2} \\ \frac{e^{3t}-e^t}{2} & \frac{e^{3t}+e^t}{2} \end{pmatrix}$$

donde

$$y(t) = \begin{pmatrix} 4e^{3t} - e^t \\ 4e^{3t} + e^t \end{pmatrix}.$$

2. Sabendo que

$$y'(t) - y(t) = -e^{-t}, \quad y(1) = y(-1),$$

determine $y(0)$.

Solução:

Resolvendo a EDO:

Solução homogênea: $\lambda - 1 = 0$ implica $\lambda = 1$ donde $y_h(t) = C_1 e^t$.

Solução particular (por coeficientes a determinar): $y_p(t) = Ce^{-t}$ implica $y_p'(t) = -Ce^{-t}$ donde $y_p t) - y_p(t) = -2Ce^{-t} = -e^{-t}$ e portanto $C = 1/2$ e $y_p(t) = e^{-t}/2$.

Solução geral: temos $y(t) = C_1 e^t + \frac{1}{2}e^{-t}$ donde $y(1) = C_1 e + \frac{e^{-1}}{2}$, $y(-1) = C_1 e^{-1} + \frac{e}{2}$ e portanto $y(1) = y(-1)$ se e somente se $C_1 e + \frac{e^{-1}}{2} = C_1 e^{-1} + \frac{e}{2}$ ou seja, se e somente se $C_1 = 1/2$.

Assim a única solução é $y(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \cosh t$ e portanto $y(0) = 1$.

3. A seqüência (y_n) satisfaz

$$y_{n+2} = 4y_{n+1} - y_n, \quad y_0 = 1, \quad \lim_{n\to+\infty} y_n = 0.$$

Determine y_1.

Solução:

Resolvendo a equação de diferenças: As raízes de $\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$ são $\lambda_1 = 2 - \sqrt{3}$ e $\lambda_2 = 2 + \sqrt{3}$. Assim a solução geral é

$$y_n = C_1(2 - \sqrt{3})^n + C_2(2 + \sqrt{3})^n.$$

Observe que $0 < 2 - \sqrt{3} < 1 < 2 + \sqrt{3}$ donde

$$\lim_{n\to+\infty} (2 - \sqrt{3})^n = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} (2 + \sqrt{3})^n = +\infty$$

e portanto a condição

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = 0.$$

é equivalente a $C_2 = 0$. Temos assim $y_n = C_1(2 - \sqrt{3})^n$. Substituindo $n = 0$ temos $y_0 = C_1 = 1$ donde $y_n = (2 - \sqrt{3})^n$. Finalmente, substituindo $n = 1$ temos $y_1 = 2 - \sqrt{3}$.