P1 de Equações diferenciais e de diferenças
MAT 1154 — 2006.1
Data: 1 de abril de 2006

Nome:________________________________ Matrícula:____________
Assinatura:____________________________ Turma:____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	2.5		
1b	2.5		
1c	2.5		
2a	2.5		
2b	2.5		
3a	1.0		
3b	1.5		
Total	10.0		

Instruções

- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta.
- Você tem direito a uma folha de consulta.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Resolva **dois dentre os três** problemas de valor inicial abaixo, isto é, encontre a função $y(x)$ que satisfaz a equação diferencial e as condições iniciais dadas.

   (a)
   $$y' = e^{x+y}, \quad y(0) = 1.$$

   Solução:
   Reescreva a equação como
   $$\frac{dy}{dx} = e^x e^y$$
   donde a equação tem variáveis separáveis:
   $$\int e^{-y} dy = \int e^x dx$$
   ou
   $$-e^{-y} + C = e^x$$
   ou
   $$y = -\ln(C - e^x).$$
   Substituindo as condições iniciais temos
   $$y = -\ln(1 + e^{-1} - e^x).$$

(b)

$$y' - 2xy = x, \quad y(0) = 0.$$

Solução:
A equação é linear. Vamos primeiro resolver a equação homogênea associada:

$$y_h' - 2xy_h = 0$$

ou

$$\frac{dy_h}{dx} = 2xy_h$$

ou

$$\int \frac{dy_h}{y_h} = \int 2x dx$$

ou (podemos omitir a constante de integração pois só precisamos por enquanto de uma solução não trivial)

$$\ln |y_h| = x^2$$

ou

$$y_h = e^{x^2}.$$

Precisamos agora de uma solução particular. É natural conjecturar que exista uma solução polinomial de grau 1: $y = ax + b$, $y' = a$, donde devemos ter $a - 2x(ax + b) = x$, o que claramente é satisfeito para $a = 0$, $b = -1/2$. Assim a solução geral é $y = -1/2 + Ce^{x^2}$.
Substituindo as condições iniciais temos

$$y = \frac{e^{x^2} - 1}{2}.$$

(c)

$$y'' - 6y' + 10y = e^{-x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Solução:

Vamos primeiro resolver a equação homogênea associada:
$\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$ tem raízes $\lambda = 3 \pm i$ donde

$$y_h = C_1 e^{3x} \cos x + C_2 e^{3x} \operatorname{sen} x.$$

É natural conjecturar que exista uma solução particular da forma $y = Ce^{-x}$. De fato, substituindo temos $17Ce^{-x} = e^{-x}$ donde $C = 1/17$ e a solução geral é

$$y = \frac{1}{17} e^{-x} + C_1 e^{3x} \cos x + C_2 e^{3x} \operatorname{sen} x$$

e

$$y' = -\frac{1}{17} e^{-x} + 3C_1 e^{3x} \cos x - C_1 e^{3x} \operatorname{sen} x + 3C_2 e^{3x} \operatorname{sen} x + C_2 e^{3x} \cos x.$$

Temos $y(0) = 1/17 + C_1 = 0$ e $y'(0) = -1/17 + 3C_1 + C_2 = 0$ donde $C_1 = -1/17$ e $C_2 = 4/17$. Assim

$$y = \frac{1}{17} e^{-x} - \frac{1}{17} e^{3x} \cos x + \frac{4}{17} e^{3x} \operatorname{sen} x.$$

2. Resolva **uma das duas** equações de diferenças abaixo.

   (a)
$$y_{n+1} - \frac{n+1}{n}\, y_n = \frac{1}{n}, \quad y_1 = 3 \quad (n \geq 1)$$

   (Dica: pode ajudar calcular y_n, $n = 1, 2, \ldots, 5$; lembre-se que a sua resposta deve ser justificada.)

   Solução:

   Uma simples aplicação da recursão dá

$$y_1 = 3, \quad y_2 = 7, \quad y_3 = 11, \quad y_4 = 15, \quad y_5 = 19$$

   donde é natural conjecturar que $y_n = 4n - 1$. Vamos verificar que esta resposta está correta substituindo na equação: $y_{n+1} = 4n + 3$,

$$\begin{aligned} y_{n+1} - \frac{n+1}{n}\, y_n &= 4n + 3 - \frac{n+1}{n}\,(4n-1) \\ &= \frac{n(4n+3) - (n+1)(4n-1)}{n} \\ &= \frac{4n^2 + 3n - 4n^2 + n - 4n + 1}{n} \\ &= \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

   o que demonstra que a fórmula está correta.

(b)
$$y_{n+2} - 2y_{n+1} - 3y_n = 1, \quad y_0 = 0, y_1 = 1.$$

Solução:
Vamos primeiro resolver a equação homogênea: $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ tem raízes $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, donde a solução homogênea é

$$\tilde{y}_n = C_1(-1)^n + C_2 3^n.$$

É natural conjecturar que exista uma solução particular constante: substituindo $y_n = C$ obtemos $-4C = 1$ donde $C = -1/4$. Assim a solução geral da equação é

$$y_n = -\frac{1}{4} + C_1(-1)^n + C_2 3^n.$$

Substituindo as condições iniciais temos $y_0 = -1/4 + C_1 + C_2 = 0$ e $y_1 = -1/4 - C_1 + 3C_2 = 1$ donde $C_1 = -1/8$, $C_2 = 3/8$ donde

$$y_n = -\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\,(-1)^n + \frac{3}{8}\,3^n.$$

3. Sabemos que as funções $y_1(x) = \cos x + e^x$ e $y_2(x) = \cos x - e^{-x}$ são soluções da equação diferencial linear

$$y' + a(x)y = b(x).$$

   (a) Encontre uma solução não trivial da equação homogênea associada

$$y_h' + a(x)y_h = 0.$$

   (b) Resolva o problema de valor inicial

$$y' + a(x)y = b(x), \quad y(0) = 1.$$

Solução:

Para o item (a), basta observar que a diferença entre duas soluções da equação é uma solução da equação homogênea associada:

$$y_h = y_1 - y_2 = e^x + e^{-x}.$$

Assim, a solução geral é

$$y = y_1 + Cy_h = \cos x + e^x + C(e^x + e^{-x}).$$

donde $y(0) = 2 + 2C$ Para o item (b), basta resolver $2 + 2C = 1$ que dá $C = -1/2$:

$$y = \cos x + \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$