P2 de Equações diferenciais e de diferenças
MAT 1154 — 2006.1
Data: 6 de maio de 2005

Nome:____________________________________ Matrícula:____________
Assinatura:________________________________ Turma:____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	3.0		
1b	3.0		
1c	3.0		
2	2.0		
3a	0.5		
3b	0.5		
3c	0.5		
3d	0.5		
Total	10.0		

Instruções

- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta.
- Você tem direito a uma folha de consulta.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Escolha **dois** dentre os três sistemas abaixo e resolva-os. Indique claramente quais itens devem ser corrigidos.

   (a)
   $$y_1' = 5y_1 + 2y_2, \quad y_2' = 2y_1 + 5y_2, \quad y_1(0) = 3, \quad y_2(0) = 1.$$

(b)

$$\mathbf{y}' - A\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$a_{n+1} = 4a_n - b_n, \quad b_{n+1} = a_n + 2b_n, \quad a_0 = 1, \quad b_0 = 1.$$

2. Considere os quatro diagramas de fase desenhados na próxima página. Cada um deles mostra as curvas $(y_1(t), y_2(t))$ onde $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ são soluções da equação $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ para alguma matriz 2×2 real A. As quatro matrizes encontram-se entre as seis opções abaixo.

   (a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

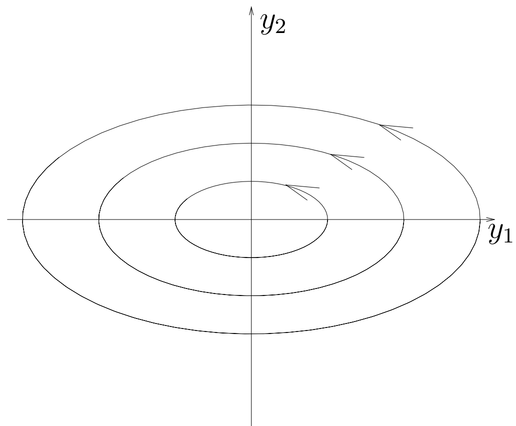
   (c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

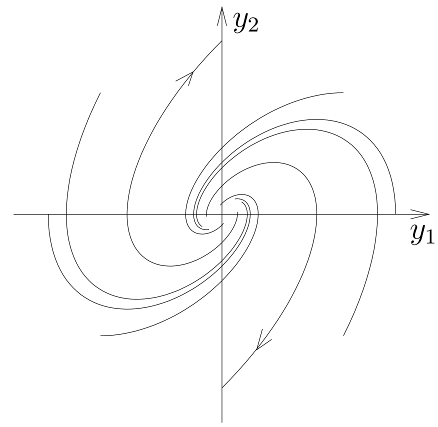
   (e) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

   (f) $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -17 \end{pmatrix}$

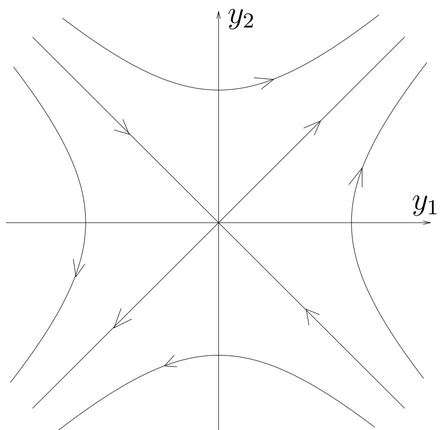
   Para cada um dos diagramas, identifique a matriz correspondente. Justifique brevemente.



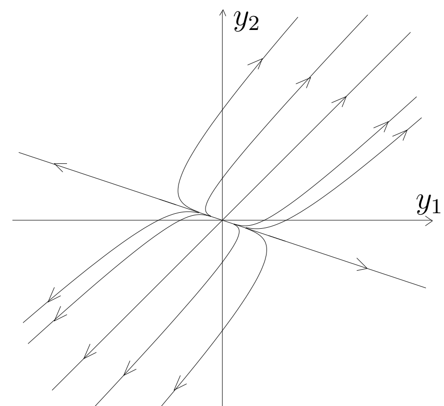
(1)



(2)



(3)



(4)

3. Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique brevemente.

   (a) Seja $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t))$ uma solução não nula de $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$, onde A é uma matriz real 2×2. Se $\lim_{t\to+\infty} y_1(t) = 0$ então $\lim_{t\to+\infty} y_2(t) = 0$.

   (b) Seja $\mathbf{y}(t)$ uma solução não nula de $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$, onde A é uma matriz real 2×2. Se $\lim_{t\to+\infty} |\mathbf{y}(t)| = +\infty$ então $\lim_{t\to-\infty} |\mathbf{y}(t)| = 0$.

(c) Seja $\mathbf{y}(t)$ uma solução não nula de $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$, onde A é uma matriz real 2×2. Se $\mathbf{y}(1) = \mathbf{y}(0)$ então $\mathbf{y}(2) = \mathbf{y}(0)$.

(d) Sejam $\mathbf{y}_1(t)$ e $\mathbf{y}_2(t)$ soluções de $\mathbf{y}'(t) - A\mathbf{y}(t) = \mathbf{b}(t)$, i.e.,

$$\mathbf{y}_1'(t) - A\mathbf{y}_1(t) = \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{y}_2'(t) - A\mathbf{y}_2(t) = \mathbf{b}(t).$$

Seja $\mathbf{y}_3(t) = \frac{1}{2}(\mathbf{y}_1(t) + \mathbf{y}_2(t))$. Então $\mathbf{y}_3$ também é solução, i.e.,

$$\mathbf{y}_3'(t) - A\mathbf{y}_3(t) = \mathbf{b}(t).$$