P2 de Equações diferenciais e de diferenças
MAT 1154 — 2006.1
Data: 6 de maio de 2005

Nome: GABARITO ________________________ Matrícula: ____________
Assinatura: ____________________________ Turma: ____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	3.0		
1b	3.0		
1c	3.0		
2	2.0		
3a	0.5		
3b	0.5		
3c	0.5		
3d	0.5		
Total	10.0		

Instruções

- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta.
- Você tem direito a uma folha de consulta.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Escolha **dois** dentre os três sistemas abaixo e resolva-os. Indique claramente quais itens devem ser corrigidos.

   (a)
$$y_1' = 5y_1 + 2y_2, \quad y_2' = 2y_1 + 5y_2, \quad y_1(0) = 3, \quad y_2(0) = 1.$$

Solução:

O problema pode ser reformulado como

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde $\mathbf{y}(t) = e^{tA}\mathbf{y}(0)$; falta calcular e^{tA}.

O polinômio característico de A é

$$p_A(\lambda) = \det\left(\begin{pmatrix} \lambda - 5 & -2 \\ -2 & \lambda - 5 \end{pmatrix}\right) = \lambda^2 - 10\lambda + 21 = (\lambda - 3)(\lambda - 7)$$

donde $e^{tA} = \alpha_t A + \beta_t I$ onde

$$\begin{aligned} 7\alpha_t + \beta_t &= e^{7t} \\ 3\alpha_t + \beta_t &= e^{3t} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_t &= \frac{e^{7t} - e^{3t}}{4}, \quad \beta_t = \frac{7e^{3t} - 3e^{7t}}{4}, \\ e^{tA} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{7t} + e^{3t} & e^{7t} - e^{3t} \\ e^{7t} - e^{3t} & e^{7t} + e^{3t} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{y}(t) &= \begin{pmatrix} 2e^{7t} + e^{3t} \\ 2e^{7t} - e^{3t} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e, finalmente,

$$y_1(t) = 2e^{7t} + e^{3t}, \quad y_2(t) = 2e^{7t} - e^{3t}.$$

(b)

$$\mathbf{y}' - A\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solução:
Temos

$$p_A(\lambda) = \det\left(\begin{pmatrix} \lambda & -2 \\ 2 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \lambda^2 + 4 = (\lambda - 2i)(\lambda + 2i)$$

donde $e^{tA} = \alpha_t A + \beta_t I$ onde

$$\begin{aligned} 2i\alpha_t + \beta_t &= e^{2it} = \cos(2t) + i\,\mathrm{sen}(2t), \\ -2i\alpha_t + \beta_t &= e^{-2it} = \cos(2t) - i\,\mathrm{sen}(2t) \end{aligned}$$

donde

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(2t) & \mathrm{sen}(2t) \\ -\mathrm{sen}(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix}.$$

É natural conjecturar que exista uma solução particular constante:

$$\mathbf{y}_p(t) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_p'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde a equação diferencial torna-se

$$-2c_2 = 1, \quad 2c_1 = -2$$

e portanto

$$c_1 = -1, \quad c_2 = -\frac{1}{2}$$

e a solução geral da equação é

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(2t) & \mathrm{sen}(2t) \\ -\mathrm{sen}(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix},$$

faltando apenas determinar c_3 e c_4. Temos

$$\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde $c_3 = 2$, $c_4 = 3/2$ e

$$\mathbf{y}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 + 4\cos(2t) + 3\,\mathrm{sen}(2t) \\ -1 - 4\,\mathrm{sen}(2t) + 3\cos(2t) \end{pmatrix}.$$

(c)

$$a_{n+1} = 4a_n - b_n, \quad b_{n+1} = a_n + 2b_n, \quad a_0 = 1, \quad b_0 = 1.$$

Solução:

Temos

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e falta calcular (ou simplificar) A^n. Temos

$$p_A(\lambda) = \det\left(\begin{pmatrix} \lambda - 4 & 1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix}\right) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$$

donde $A^n = \alpha_n A + \beta_n I$ onde

$$\begin{aligned} 3^n\alpha_n + \beta_n &= 3^n \\ \alpha_n \qquad &= n3^{n-1} \end{aligned}$$

donde $\alpha_n = (1/3)n3^n$, $\beta_n = (1-n)3^n$ e

$$A^n = 3^n \begin{pmatrix} 1 + (1/3)n & (-1/3)n \\ (1/3)n & 1 - (1/3)n \end{pmatrix}$$

donde

$$a_n = b_n = 3^n.$$

2. Considere os quatro diagramas de fase desenhados na próxima página. Cada um deles mostra as curvas $(y_1(t), y_2(t))$ onde $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ são soluções da equação $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ para alguma matriz 2×2 real A. As quatro matrizes encontram-se entre as seis opções abaixo.

   (a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (e) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

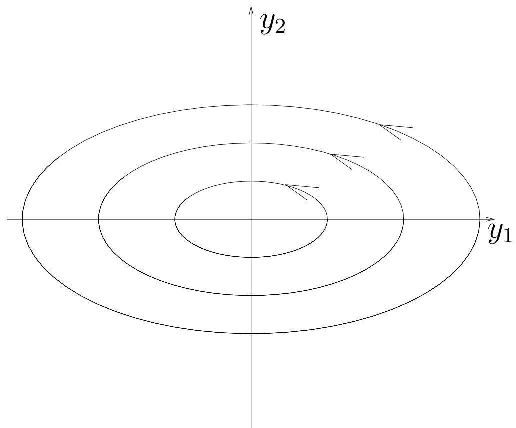
   (f) $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -17 \end{pmatrix}$

   Para cada um dos diagramas, identifique a matriz correspondente. Justifique brevemente.

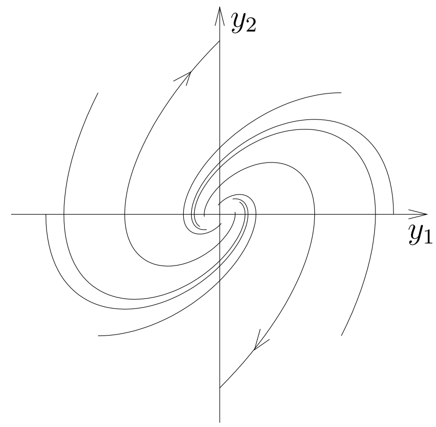
   Solução:

   A correspondência correta é 1d, 2c, 3a, 4e.

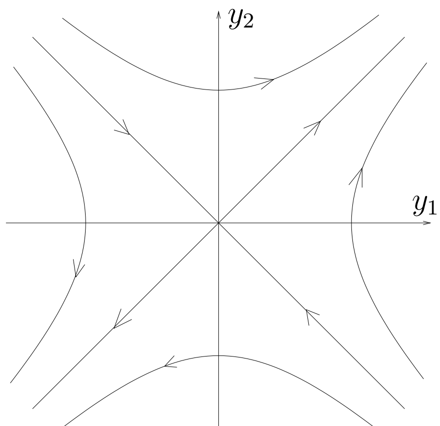
   Isto pode ser verificado, por exemplo, estudando os sinais dos autovalores das matrizes acima. No item (a), temos autovalores reais de sinais opostos e portanto uma sela (como em (3)). No item (b) temos um autovalor igual a 0 e portanto uma figura degenerada (que não aparece na próxima página). No item (c) temos dois autovalores complexos conjugados de parte real positiva e portanto uma espiral para fora (como em (2)). No item (d) temos dois autovalores complexos conjugados com parte real 0 e portanto órbitas fechadas (como em (1)). No item (e) temos autovalores reais positivos distintos e portanto todas as órbitas saem da origem e temos órbitas contidas em duas retas correspondentes aos autovetores (como em (4)). No item (f) temos autovalores reais negativos distintos e portanto todas as órbitas entram na origem e temos órbitas contidas em duas retas correspondentes aos autovetores (novamente uma figura que não aparece). Não houve ambiguidade donde podemos afirmar que encontramos a correspondência correta.



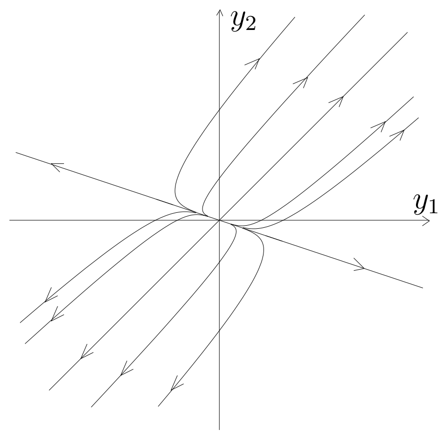
(1)



(2)



(3)



(4)

3. Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique brevemente.

(a) Seja $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t))$ uma solução não nula de $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$, onde A é uma matriz real 2×2. Se $\lim_{t\to+\infty} y_1(t) = 0$ então $\lim_{t\to+\infty} y_2(t) = 0$.

Solução:

FALSO. Um contraexemplo é

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{t} \end{pmatrix}.$$

Temos

$$\lim_{t\to+\infty} y_1(t) = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} y_2(t) = +\infty.$$

(b) Seja $\mathbf{y}(t)$ uma solução não nula de $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$, onde A é uma matriz real 2×2. Se $\lim_{t\to+\infty} |\mathbf{y}(t)| = +\infty$ então $\lim_{t\to-\infty} |\mathbf{y}(t)| = 0$.

Solução:

FALSO. O contraexemplo dado no item (a) serve, a curva de cima na figura (3) da questão 2 também serve.

(c) Seja $\mathbf{y}(t)$ uma solução não nula de $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$, onde A é uma matriz real 2×2. Se $\mathbf{y}(1) = \mathbf{y}(0)$ então $\mathbf{y}(2) = \mathbf{y}(0)$.

Solução:

VERDADEIRO. Temos $\mathbf{y}(1) = e^{A}\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}(0)$ donde

$$\mathbf{y}(2) = e^{2A}\mathbf{y}(0) = e^{A}(e^{A}\mathbf{y}(0)) = e^{A}\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}(0).$$

(d) Sejam $\mathbf{y}_1(t)$ e $\mathbf{y}_2(t)$ soluções de $\mathbf{y}'(t) - A\mathbf{y}(t) = \mathbf{b}(t)$, i.e.,

$$\mathbf{y}_1'(t) - A\mathbf{y}_1(t) = \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{y}_2'(t) - A\mathbf{y}_2(t) = \mathbf{b}(t).$$

Seja $\mathbf{y}_3(t) = \frac{1}{2}(\mathbf{y}_1(t) + \mathbf{y}_2(t))$. Então $\mathbf{y}_3$ também é solução, i.e.,

$$\mathbf{y}_3'(t) - A\mathbf{y}_3(t) = \mathbf{b}(t).$$

Solução:

VERDADEIRO.

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_3'(t) - A\mathbf{y}_3(t) &= \left(\frac{\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2}{2}\right)'(t) - A\left(\frac{\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2}{2}\right)(t) \\
&= \frac{\mathbf{y}_1'(t) + \mathbf{y}_2'(t) - A\mathbf{y}_1(t) - A\mathbf{y}_2(t)}{2} \\
&= \frac{(\mathbf{y}_1'(t) - A\mathbf{y}_1(t)) + (\mathbf{y}_2'(t) - A\mathbf{y}_2(t))}{2} \\
&= \frac{\mathbf{b}(t) + \mathbf{b}(t)}{2} \\
&= \mathbf{b}(t).
\end{aligned}$$