P3 de Equações diferenciais e de diferenças
MAT 1154 — 2006.1
Data: 24 de junho de 2006

Nome:________________________ Matrícula:__________
Assinatura:______________________ Turma:__________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	3.0		
2a	0.8		
2b	0.8		
2c	0.7		
2d	0.7		
3a	1.0		
3b	1.0		
4a	1.0		
4b	1.0		
Total	10.0		

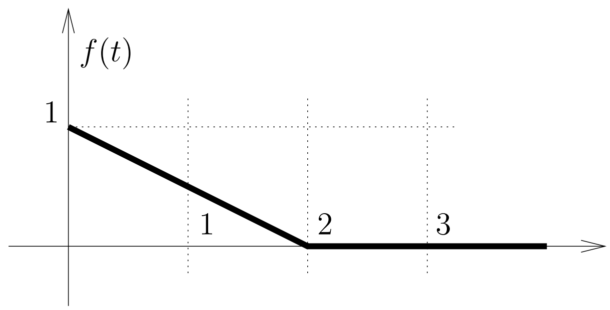
Instruções

- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta.
- Você tem direito a uma folha de consulta.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Resolva o problema de valor inicial abaixo:

$$y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

onde f tem o gráfico abaixo:



Solução: Temos $f(t) = 1 - t/2 + u_2(t)(t-2)/2$. Assim, aplicando a transformada de Laplace dos dois lados temos

$$s^2Y - 1 + 4sY + 5Y = \frac{1}{s} - \frac{1}{2s^2} + \frac{e^{-2s}}{2s^2}$$

donde

$$Y = \frac{1}{(s+2)^2+1} + \frac{1}{s((s+2)^2+1)} - \frac{1}{2s^2((s+2)^2+1)} + \frac{e^{-2s}}{2s^2((s+2)^2+1)}.$$

Vamos fazer a decomposição em frações parciais:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s((s+2)^2+1)} &= \frac{A}{s} + \frac{B(s+2)+C}{(s+2)^2+1} \\
&= \frac{A(s^2+4s+5) + B(s^2+2s) + Cs}{s((s+2)^2+1)} \\
&= \frac{(A+B)s^2 + (4A+2B+C)s + 5A}{s((s+2)^2+1)}
\end{aligned}$$

donde $A = 1/5$, $B = -1/5$, $C = -2/5$:

$$\frac{1}{s((s+2)^2+1)} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{s} - \frac{s+2}{(s+2)^2+1} - \frac{2}{(s+2)^2+1}\right).$$

Temos ainda:

$$\frac{1}{s^2((s+2)^2+1)} = \frac{D}{s} + \frac{E}{s^2} + \frac{F(s+2)+G}{(s+2)^2+1}$$

$$= \frac{D(s^3+4s^2+5s)+E(s^2+4s+5)+F(s^3+2s^2)+Gs^2}{s^2((s+2)^2+1)}$$

$$= \frac{(D+F)s^3+(4D+E+2F+G)s^2+(5D+4E)s+5E}{s^2((s+2)^2+1)}$$

donde $E = 1/5$, $D = -4/25$, $F = 4/25$, $G = 3/25$:

$$\frac{1}{s^2((s+2)^2+1)} = \frac{1}{25}\left(-\frac{4}{s}+\frac{5}{s^2}+\frac{4(s+2)}{(s+2)^2+1}+\frac{3}{(s+2)^2+1}\right).$$

Assim,

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{(s+2)^2+1}+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{s}-\frac{s+2}{(s+2)^2+1}-\frac{2}{(s+2)^2+1}\right) \\ &\quad -\frac{1}{50}\left(-\frac{4}{s}+\frac{5}{s^2}+\frac{4(s+2)}{(s+2)^2+1}+\frac{3}{(s+2)^2+1}\right) \\ &\quad +\frac{e^{-2s}}{50}\left(-\frac{4}{s}+\frac{5}{s^2}+\frac{4(s+2)}{(s+2)^2+1}+\frac{3}{(s+2)^2+1}\right) \\ &= \frac{1}{50}\left(14\,\frac{1}{s}-5\,\frac{1}{s^2}-14\,\frac{s+2}{(s+2)^2+1}+27\,\frac{1}{(s+2)^2+1}\right) \\ &\quad +\frac{e^{-2s}}{50}\left(-\frac{4}{s}+\frac{5}{s^2}+\frac{4(s+2)}{(s+2)^2+1}+\frac{3}{(s+2)^2+1}\right) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} y(t) = \frac{1}{50}\Big(&14-5t-14e^{-2t}\cos(t)+27e^{-2t}\operatorname{sen}(t) \\ &+u_2(t)\left(-4+5(t-2)+4e^{-2(t-2)}\cos(t-2)+3e^{-2(t-2)}\operatorname{sen}(t-2)\right)\Big). \end{aligned}$$

2. Considere o problema de valor inicial abaixo:

$$y''(t) - (4t^2 - 2)y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Considere ainda a expansão em série de potências da solução:

$$y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots + a_n t^n + \cdots .$$

(a) Encontre uma equação de diferenças relacionando os coeficientes a_n.

(b) Encontre a_n para $n < 12$.

(c) A partir dos valores para a_n encontrados no item anterior, faça uma conjectura para o valor de a_n (em função de n). Verifique a sua conjectura usando a equação de diferenças do item (a).

(d) Identifique a função y (isto é, dê uma fórmula explícita e elementar para y em função de t).

Solução:

(a) Temos

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + \cdots + (n+1)(n+2)a_{n+2}t^n + \cdots ,$$
$$t^2 y = a_0 t^2 + \cdots + a_{n-2}t^n + \cdots ,$$

donde

$$0 = y'' - (4t^2 - 2)y = (2a_2 + 2a_0) + (6a_3 + 2a_1)t + (12a_4 + 2a_2 - 4a_0)t^2 + \cdots + ((n+1)(n+2)a_{n+2} + 2a_n - 4a_{n-2})t^n + \cdots$$

e portanto $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -1$, $a_3 = 0$ e, para $n \geq 2$,

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + 2a_n - 4a_{n-2} = 0 \qquad (*)$$

ou

$$a_{n+2} = \frac{-2a_n + 4a_{n-2}}{(n+1)(n+2)}.$$

(b) Da equação segue imediatamente que $a_n = 0$ para n ímpar;

$$a_4 = \frac{2+4}{3 \cdot 4} = \frac{1}{2}; \quad a_6 = \frac{-\frac{2}{2} - 4}{5 \cdot 6} = -\frac{1}{6};$$
$$a_8 = \frac{\frac{2}{6} + \frac{4}{2}}{7 \cdot 8} = \frac{1}{24}; \quad a_{10} = \frac{-\frac{2}{24} - \frac{4}{6}}{9 \cdot 10} = -\frac{1}{120}.$$

(c) É natural conjecturar que $a_{2m} = (-1)^m/m!$; a fórmula vale para $m \leq 5$. Vamos substituir esta expressão na equação $(*)$:

$$(2m+1)(2m+2)\frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!} + 2\frac{(-1)^m}{m!} - 4\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} =$$

$$= \frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!}\left((2m+1)(2m+2) - 2(m+1) - 4m(m+1)\right) =$$

$$= \frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!}\left(4m^2 + 6m + 2 - 2m - 2 - 4m^2 - 4m\right) = 0.$$

Assim a fórmula está correta.

(d) Temos

$$\begin{aligned} y &= 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - \cdots \\ &= 1 + (-t^2) + \frac{(-t^2)^2}{2!} + \frac{(-t^2)^3}{3!} + \frac{(-t^2)^4}{4!} + \cdots \\ &= e^{-t^2} \end{aligned}$$

pois

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots .$$

3. Em cada um dos itens abaixo é dada uma função F. Encontre f, a transformada de Laplace inversa de F.

(a)

$$F(s) = \frac{1}{s^3 - 4s}$$

Solução:

Temos

$$F(s) = \frac{1}{s^3 - 4s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+2};$$

expandindo e substituindo $s = 0$, $s = 2$ e $s = -2$ obtemos $A = -1/4$, $B = C = 1/8$ donde

$$f(t) = -\frac{1}{4} + \frac{e^{2t}}{8} + \frac{e^{-2t}}{8} = -\frac{1}{4} + \frac{\cosh(2t)}{4}.$$

(b)

$$F(s) = \frac{e^{-2s}}{(s-1)^3}$$

Solução:

Pela tabela,

$$f(t) = u_2(t)\frac{(t-2)^2 e^{t-2}}{2}.$$

4. Em cada um dos itens abaixo é dada uma função f. Calcule a transformada de Laplace F de cada uma destas funções.

(a)

$$f(t) = \int_0^t (t-\tau)^3 \operatorname{sen}(2\tau)\, d\tau$$

Solução:

Temos $f = g * h$ onde $g(t) = t^3$ e $h(t) = \operatorname{sen}(2t)$. Assim

$$F(s) = G(s)H(s) = \frac{6}{s^4}\frac{2}{s^2+4}.$$

(b)

$$f(t) = |1 - t^2|.$$

Solução:

Temos

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & t \leq 1 \\ t^2 - 1, & t \geq 1 \end{cases}$$

ou

$$f(t) = 1 - t^2 + u_1(t)(2t^2 - 2) = 1 - t^2 + u_1(t)(2(t-1)^2 + 4(t-1))$$

donde

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^3} + \frac{4e^{-s}}{s^3} + \frac{4e^{-s}}{s^2}.$$