P4 de Equações diferenciais e de diferenças
MAT 1154 — 2006.1
Data: 1 de julho de 2006

Nome:______________________________ Matrícula:__________

Assinatura:____________________________ Turma:__________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	2.0		
1b	2.0		
1c	2.0		
2	2.0		
3	2.0		
Total	10.0		

Instruções

- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta.
- Você tem direito a uma folha de consulta.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Resolva os problemas de valor inicial abaixo:

   (a)
$$y''(t) - 6y'(t) + 10y(t) = e^{2t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Primeira solução: Vamos primeiro resolver a equação homogênea
$$y_h''(t) - 6y_h'(t) + 10y_h(t) = 0.$$
A equação algébrica associada é $\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$ que tem raízes complexas conjugadas $3 \pm i$. Assim
$$y_h(t) = C_1 e^{3t} \cos t + C_2 e^{3t} \operatorname{sen} t.$$
Vamos agora encontrar uma solução particular. É natural conjecturar que exista uma solução da forma $y_p = Ce^{2t}$. Substituindo, temos $4Ce^{2t} - 12Ce^{2t} + 10Ce^{2t} = e^{2t}$ o que de fato dá uma solução para $C = 1/2$. Assim a solução geral é
$$y(t) = C_1 e^{3t} \cos t + C_2 e^{3t} \operatorname{sen} t + \frac{e^{2t}}{2}$$
e
$$y'(t) = 3C_1 e^{3t} \cos t - C_1 e^{3t} \operatorname{sen} t + 3C_2 e^{3t} \operatorname{sen} t + C_2 e^{3t} \cos t + e^{2t}$$
donde $y(0) = C_1 + 1/2 = 1$ e $y'(0) = 3C_1 + C_2 + 1 = 0$ donde $C_1 = 1/2$, $C_2 = -5/2$ e
$$y(t) = \frac{1}{2}\left(e^{3t} \cos t - 5e^{3t} \operatorname{sen} t + e^{2t}\right).$$
Segunda solução: Aplicando a transformada de Laplace dos dois lados temos
$$s^2 Y(s) - s - 6sY(s) + 6 + 10Y(s) = \frac{1}{s-2}$$
donde
$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s-3)^2+1}\left(s - 6 + \frac{1}{s-2}\right) \\ &= \frac{s^2 - 8s + 13}{(s-2)((s-3)^2+1)} \\ &= \frac{A}{s-2} + \frac{B}{(s-3)^2+1} + \frac{C(s-3)}{(s-3)^2+1}. \end{aligned}$$
Expandindo e resolvendo temos $A = 1/2$, $B = -5/2$ e $C = 1/2$ donde
$$Y(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{s-3}{(s-3)^1+1} - \frac{5}{(s-3)^2+1} + \frac{1}{s-2}\right)$$
donde
$$y(t) = \frac{1}{2}\left(e^{3t} \cos t - 5e^{3t} \operatorname{sen} t + e^{2t}\right).$$

(b)

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 \le t \le \pi/2 \\ 0, & t \ge \pi/2, \end{cases}$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Solução: Seja

$$f(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 \le t \le \pi/2 \\ 0, & t \ge \pi/2. \end{cases}$$

Temos

$$f(t) = \cos t - u_{\pi/2}(t) \cos t = \cos t + u_{\pi/2} \operatorname{sen}(t - \pi/2).$$

Aplicando agora a transformada de Laplace aos dois lados da equação temos

$$s^2 Y(s) - 1 + 4sY(s) + 4Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{e^{-\pi s/2}}{s^2+1}$$

donde

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s+2)^2}\left(1 + \frac{s}{s^2+1} + \frac{e^{-\pi s/2}}{s^2+1}\right) \\ &= \frac{s^2+s+1}{(s+2)^2(s^2+1)} + e^{-\pi s/2} \frac{1}{(s+2)^2(s^2+1)} \end{aligned}$$

Devemos portanto efetuar as decomposições em frações parciais

$$\frac{s^2+s+1}{(s+2)^2(s^2+1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

e

$$\frac{1}{(s+2)^2(s^2+1)} = \frac{E}{s+2} + \frac{F}{(s+2)^2} + \frac{Gs+H}{s^2+1}.$$

Expandindo e resolvendo temos

$$A = -\frac{3}{25}, \quad B = \frac{3}{5}, \quad C = \frac{3}{25}, \quad D = \frac{4}{25}$$

$$E = \frac{4}{25}, \quad F = \frac{1}{5}, \quad G = -\frac{4}{25}, \quad H = \frac{3}{25}$$

e portanto

$$\begin{aligned} Y(s) = \frac{1}{25}&\left(-\frac{3}{s+2} + \frac{15}{(s+2)^2} + \frac{3s}{s^2+1} + \frac{4}{s^2+1}\right) \\ &+ \frac{e^{-\pi s/2}}{25}\left(\frac{4}{s+2} + \frac{5}{(s+2)^2} - \frac{4s}{s^2+1} + \frac{3}{s^2+1}\right) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} y(t) = \frac{1}{25}\Big(&- 3e^{-2t} + 15te^{-2t} + 3\cos t + 4\operatorname{sen} t \\ &+ u_{\frac{\pi}{2}}(t)\left(4e^{-2(t-\frac{\pi}{2})} + 5(t-\frac{\pi}{2})e^{-2(t-\frac{\pi}{2})} - 4\cos(t-\frac{\pi}{2}) + 3\operatorname{sen}(t-\frac{\pi}{2})\right)\Big). \end{aligned}$$

(c)

$$y'(t) - Ay(t) = b, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Primeira solução: A equação homogênea $y_h'(t) - Ay_h(t) = 0$ tem solução $y_h(t) = \exp(tA)y_h(0)$; devemos calcular $\exp(tA)$. Os autovalores de A são as raízes de $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 - 8\lambda + 15$: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 5$. Assim $\exp(tA) = \alpha_t A + \beta_t I$ onde $3\alpha_t + \beta_t = e^{3t}$ e $5\alpha_t + \beta_t = e^{5t}$ donde $\alpha_t = (e^{5t} - e^{3t})/2$ e $\beta_t = (5e^{3t} - 3e^{5t})/2$ e

$$\exp(tA) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{5t} + e^{3t} & e^{5t} - e^{3t} \\ e^{5t} - e^{3t} & e^{5t} + e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Vamos procurar uma solução particular; é natural conjecturar que exista uma solução constante $y = (a, b)$. Teríamos $y' = (0, 0)$ e $y' - Ay = (-4a - b, -a - 4b) = (3, -3)$ donde $y = (-1, 1)$ de fato é solução particular. Assim a solução geral é

$$y(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{5t} + e^{3t} & e^{5t} - e^{3t} \\ e^{5t} - e^{3t} & e^{5t} + e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

com $y(0) = (-1 + c, 1 + d)$. Temos assim $c = 3$, $d = -1$ e

$$\begin{aligned} y(t) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{5t} + e^{3t} & e^{5t} - e^{3t} \\ e^{5t} - e^{3t} & e^{5t} + e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 + e^{5t} + 2e^{3t} \\ 1 + e^{5t} - 2e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Segunda solução: Encontramos os autovalores $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 5$ como na primeira solução. Encontramos os autovetores correspondentes:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde a solução da equação homogênea $y_h' - Ay_h = 0$ é

$$y_h(t) = C_1 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Encontramos a solução particular como na primeira solução, obtendo assim a solução geral

$$y(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_1 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Substituindo $t = 0$ obtemos $C_1 = 2$, $C_2 = 1$ donde

$$y(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Sabendo que

$$y''(t) - t^2 y'(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0,$$

determine $y^{(k)}(0)$ para $k = 2, 3, 4$.

Primeira solução: Vamos expandir y como uma série de potências:

$$y(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \cdots$$

onde $a_k = y^{(k)}(0)/k!$. Pelo enunciado, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$. Temos

$$\begin{aligned} y'(t) &= a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + \cdots, \\ t^2 y'(t) &= a_1 t^2 + 2a_2 t^3 + 3a_3 t^4 + 4a_4 t^5 + \cdots, \\ y''(t) &= 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + \cdots \end{aligned}$$

donde

$$0 = y''(t) - t^2 y'(t) + y(t) = (2a_2 + a_0) + (6a_3 + a_1)t + (12a_4 - a_1 + a_2)t^2 + \cdots$$

donde

$$2a_2 + a_0 = 0, \quad 6a_3 + a_1 = 0, \quad 12a_4 - a_1 + a_2 = 0$$

donde

$$a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = \frac{1}{24}$$

donde

$$y^{(2)}(0) = -1, \quad y^{(3)}(0) = 0, \quad y^{(4)}(0) = 1.$$

Segunda solução: Substituindo $t = 0$ na equação diferencial temos $y''(0) + y(0) = 0$ donde $y''(0) = -1$. Derivando os dois lados da equação temos

$$y^{(3)}(t) - t^2 y^{(2)}(t) + (1 - 2t)y'(t) = 0;$$

substituindo $t = 0$ temos $y^{(3)}(0) + y'(0) = 0$ donde $y^{(3)}(0) = 0$. Derivando novamente temos

$$y^{(4)}(t) - t^2 y^{(3)}(t) + (1 - 4t)y^{(2)}(t) - 2y'(t) = 0$$

e, para $t = 0$, $y^{(4)}(0) + y^{(2)}(0) - 2y'(0) = 0$ donde $y^{(4)}(0) = 1$.

3. A seqüência (y_n) satisfaz

$$y_{n+2} = 2y_{n+1} - 4y_n, \quad y_0 = 1.$$

Determine y_6.

Primeira solução: As raízes de $\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0$ são $1 \pm \sqrt{-3}$. Assim

$$y_n = C_1(1+\sqrt{-3})^n + C_2(1-\sqrt{-3})^n.$$

Sabemos que $y_0 = C_1 + C_2 = 1$. Temos

$$y_6 = C_1(1+\sqrt{-3})^6 + C_2(1-\sqrt{-3})^6.$$

Mas

$$(1+\sqrt{-3})^6 = (1-\sqrt{-3})^6 = 64$$

donde

$$y_6 = 64(C_1 + C_2) = 64y_0 = 64.$$

Observe que os dados do enunciado não permitem encontrar C_1 e C_2.

Segunda solução: Encontre as raízes como na primeira solução e escreva-as na forma polar:

$$1 \pm \sqrt{-3} = 2e^{\pm\pi i/3}$$

donde

$$y_n = C_1 2^n \cos(n\pi/3) + C_2 2^n \operatorname{sen}(n\pi/3).$$

Da fórmula, $y_0 = C_1 = 1$ donde

$$y_6 = 2^6 \cos(2\pi) + C_2 2^6 \operatorname{sen}(2\pi) = 64.$$

Terceira solução: Temos

$$\begin{aligned}
y_2 &= 2y_1 - 4y_0 = 2y_1 - 4\\
y_3 &= 2y_2 - 4y_1 = 2(2y_1 - 4) - 4y_1 = -8\\
y_4 &= 2y_3 - 4y_2 = -16 - 4(2y_1 - 4) = -8y_1\\
y_5 &= 2y_4 - 4y_3 = 2(-8y_1) - 4(-8) = -16y_1 + 32\\
y_6 &= 2y_5 - 4y_4 = 2(-16y_1 + 32) - 4(-8y_1) = 64.
\end{aligned}$$