P1 de Equações diferenciais e de diferenças
MAT 1154 — 2006.1
Data: 23 de setembro de 2006

Nome: **GABARITO** ______________________________ Matrícula:____________
Assinatura:____ Turma:____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	2.0		
1b	2.0		
2	2.0		
3a	2.0		
3b	2.0		
Total	10.0		

Instruções

- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Resolva os problemas de valor inicial abaixo, isto é, encontre a função $y(x)$ que satisfaz a equação diferencial e as condições iniciais dadas.

   (a)
$$y' + \frac{y}{x+1} = \frac{1}{x+1}, \quad y(0) = 0.$$

   Solução:

   Vamos primeiro resolver a equação homogênea associada
$$y_h' + \frac{y_h}{x+1} = 0$$
   separando variáveis:
$$\begin{aligned}\int \frac{dy_h}{y_h} &= -\int \frac{dx}{x+1},\\ \ln|y_h| &= -\ln|x+1| + C_1,\\ y_h &= \frac{C}{x+1},\end{aligned}$$
   A solução particular $y_p = 1$ pode ser facilmente encontrada por inspeção. Alternativamente, por variação dos parâmetros: $y_p = z/(x+1)$ implica $z'/(x+1) = 1/(x+1)$ donde $z' = 1$ donde podemos tomar $z = x+1$ o que implica $y_p = 1$. De qualquer forma, a solução geral é
$$y = 1 + \frac{C}{x+1} = \frac{x+1+C}{x+1}.$$
   Substituindo $x = 0$ e $y = 0$ obtemos $C = -1$ donde
$$y = \frac{x}{x+1}.$$

(b)

$$y' + xy^2 = 2y^2, \quad y(0) = 1.$$

Solução:

Reescreva a equação como $y' = (2-x)y^2$ e faça separação de variáveis:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{y^2} &= \int (2-x)\, dx, \\
-\frac{1}{y} &= 2x - x^2/2 + C, \\
y &= \frac{2}{x^2 - 4x - 2C}.
\end{aligned}$$

Substituindo $x = 0$ e $y = 1$ temos $C = -1$ donde

$$y = \frac{2}{x^2 - 4x + 2}.$$

2. Resolva a equação de diferenças abaixo:

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 1, \quad y_0 = 2, \quad y_1 = 3.$$

Solução:

A equação associada $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ tem raiz dupla $\lambda = 2$ donde a solução da equação homogênea associada é $C_1 2^n + C_2 n 2^n$.

É natural conjecturar que exista uma solução particular constante $y_n = C$. Substituindo na equação temos $C - 4C + 4C = 1$ donde de fato $y_n = 1$ é solução. Assim a solução geral é

$$y_n = 1 + C_1 2^n + C_2 n 2^n$$

e substituindo obtemos $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ donde

$$y_n = 1 + 2^n.$$

3. Seja y_b a solução do problema de valor inicial

$$y'' + by' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

onde $b > 0$ é um parâmetro real.

(a) Calcule y_b, separando em casos se necessário.

(b) Determine para quais valores de b vale a condição

$$\lim_{x \to +\infty} e^x y_b(x) = 0.$$

Solução:

(a) A equação associada $\lambda^2 + b\lambda + 4 = 0$ tem raízes

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 16}}{2}.$$

É conveniente separar em três casos.

$b > 4$**: raízes reais distintas**

Sejam

$$\lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 16}}{2} < \lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 16}}{2}.$$

A solução geral é $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ e as condições iniciais dão

$$\begin{aligned} y_b &= \frac{1}{\sqrt{b^2 - 16}} \left(e^{\lambda_2 x} - e^{\lambda_1 x} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{b^2 - 16}} \left(\exp\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 16}}{2}\, x \right) - \exp\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 16}}{2}\, x \right) \right). \end{aligned}$$

$b = 4$**: raiz real dupla**

Temos que $\lambda = -2$ é raiz dupla donde a solução geral é $y = C_1 e^{-2x} + C_2 x\, e^{-2x}$. As condições iniciais dão

$$y_b = x\, e^{-2x}.$$

$0 < b < 4$**: raízes complexas conjugadas**

Seja $\alpha = -b/2$, $\beta = \sqrt{16 - b^2}/2$. As raízes são $\alpha \pm \beta i$ donde a solução geral é

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$$

e as condições iniciais implicam que

$$y_b = \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x) = \frac{2}{\sqrt{16 - b^2}}\, e^{-bx/2} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{16 - b^2}}{2}\, x \right).$$

(b)

No caso $b > 4$ temos

$$e^x y_b = \frac{1}{\sqrt{b^2-16}} \left(e^{(\lambda_2+1)x} - e^{(\lambda_1+1)x}\right)$$

que claramente tende a 0 se e somente se $\lambda_2 + 1 < 0$, i.e.,

$$\begin{aligned} \frac{-b+\sqrt{b^2-16}}{2} &< -1 \\ -b+\sqrt{b^2-16} &< -2 \\ \sqrt{b^2-16} &< b-2 \\ b^2-16 &< b^2-4b+4 \\ 4b &< 20 \\ b &< 5 \end{aligned}$$

No caso $b = 4$ temos $e^x y_b = xe^{-x}$ que claramente tende a 0.

No caso $0 < b < 4$ temos

$$e^x y_b = \frac{2}{\sqrt{16-b^2}}\, e^{(1-b/2)x} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{16-b^2}}{2}\, x\right)$$

que claramente tende a zero se e somente se $1 - b/2 < 0$, i.e., para $b > 2$.

Concluindo, a condição vale precisamente para $2 < b < 5$.