P2 de Equações diferenciais e de diferenças

MAT 1154 — 2006.2

Data: 28 de outubro de 2006

Nome:____ Matrícula:______________

Assinatura:____________________________________ Turma:______________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	2.0		
1b	2.0		
2	2.0		
3	2.0		
4a	1.0		
4b	1.0		
Total	10.0		

Instruções

- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Resolva os problemas de valor inicial abaixo:

   (a)

$$\mathbf{y}' - A\mathbf{y} = b(t), \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} e^t + e^{-t} \\ e^t - e^{-t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$y_1' = 4y_1 - y_2, \quad y_2' = 4y_1 + 4y_2, \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0.$$

2. Resolva o sistema de equações de diferenças abaixo:

$$a_{n+1} = 6a_n - b_n + 1, \quad b_{n+1} = a_n + 4b_n + 1, \quad a_0 = 0, \quad b_0 = 0.$$

3. Considere os seis diagramas de fase desenhados na próxima página. Cada um deles mostra as curvas $(y_1(t), y_2(t))$ onde $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ são soluções da equação $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ para alguma matriz 2×2 real A. As seis matrizes encontram-se entre as oito opções abaixo.

   (a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

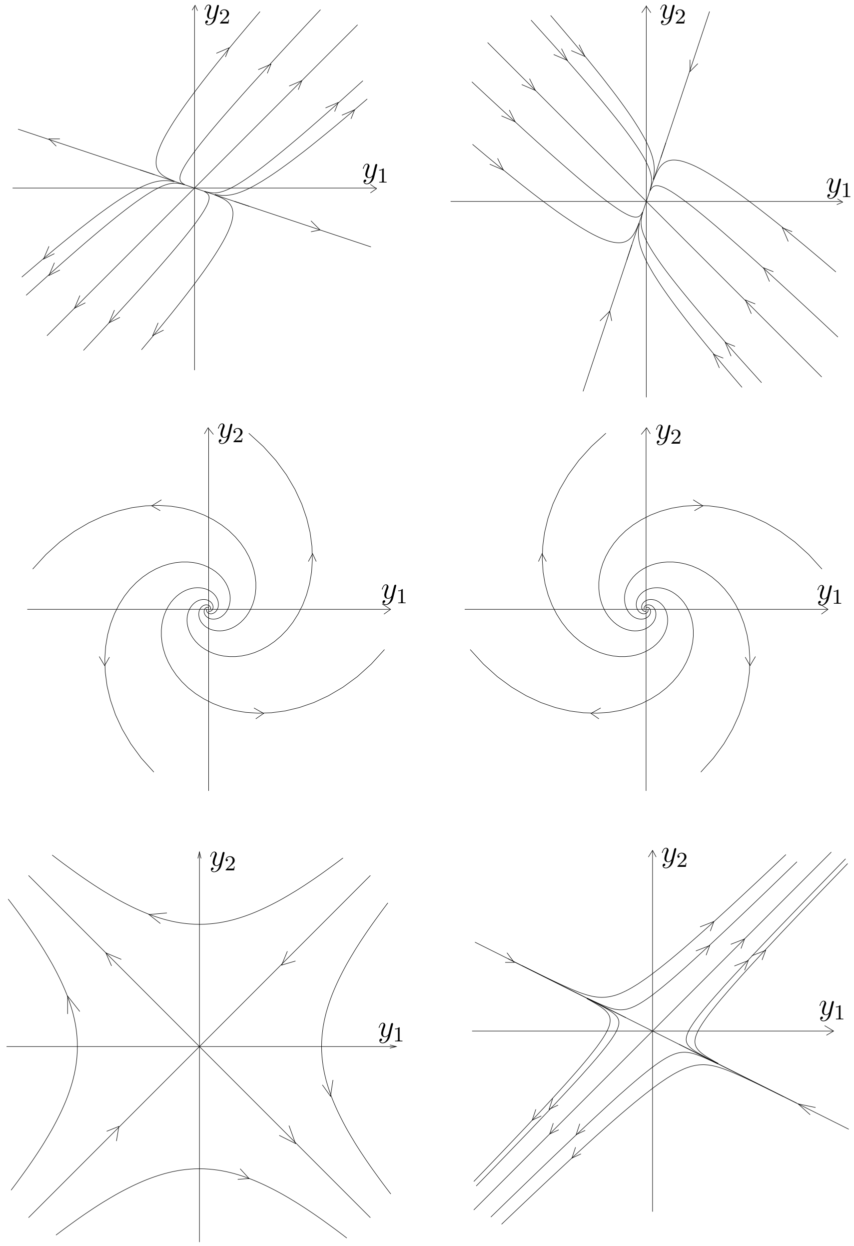
   (e) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

   (f) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

   (g) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

   (h) $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

   Para cada um dos diagramas, identifique a matriz correspondente.


y_2
y_1
y_2
y_1
y_2
y_1
y_2
y_1
y_2
y_1
y_2
y_1

4. Para cada uma das matrizes M abaixo, diga se existe uma matriz real A com $e^A = M$. Se existir, dê um exemplo. Se não existir, justifique.

   (a)
$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

   (b)
$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$