P2 de Equações diferenciais e de diferenças
MAT 1154 — 2006.2
Data: 28 de outubro de 2006

Nome: GABARITO ______________________________ Matrícula: ____________
Assinatura: ______________________________ Turma: ____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	2.0		
1b	2.0		
2	2.0		
3	2.0		
4a	1.0		
4b	1.0		
Total	10.0		

Instruções

- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Resolva os problemas de valor inicial abaixo:

(a)

$$\mathbf{y}' - A\mathbf{y} = b(t), \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} e^t + e^{-t} \\ e^t - e^{-t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solução:
Os autovalores de A são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 4$ donde $e^{tA} = \alpha_t A + \beta_t I$ onde $4\alpha_t + \beta_t = e^{4t}$ e $2\alpha_t + \beta_t = e^{2t}$ donde $\alpha_t = (e^{4t} - e^{2t})/2$ e $\beta_t = 2e^{2t} - e^{4t}$ e portanto

$$e^{tA} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{4t} + e^{2t} & e^{4t} - e^{2t} \\ e^{4t} - e^{2t} & e^{4t} + e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Alternativamente, podemos calcular os autovetores $v_1 = (1, -1)$ e $v_2 = (1, 1)$ e escrever a solução da equação homogênea como

$$\mathbf{y}_h(t) = C_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

É natural conjecturar que exista uma solução particular da forma

$$\mathbf{y}_p(t) = \begin{pmatrix} C_3 e^t + C_4 e^{-t} \\ C_5 e^t + C_6 e^{-t} \end{pmatrix}$$

o que dá

$$\mathbf{y}_p'(t) - A\mathbf{y}_p(t) = \begin{pmatrix} (-2C_3 - C_5)e^t + (-4C_4 - C_6)e^{-t} \\ (-C_3 - 2C_5)e^t + (-C_4 - 4C_6)e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t + e^{-t} \\ e^t - e^{-t} \end{pmatrix}$$

donde $C_3 = C_4 = C_5 = -1/3$, $C_6 = 1/3$. Assim a solução geral é

$$\mathbf{y}(t) = (C_1 e^{2t} - e^{-t}/3)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + (C_2 e^{4t} - e^t/3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Assim $\mathbf{y}_h(0) = (C_1 - 1/3)(1, -1) + (C_2 - 1/3)(1, 1) = (-1, 1)$ donde $C_1 = -2/3$ e $C_2 = 1/3$. Assim

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(t) &= \frac{1}{3}\left((2e^{2t} + e^{-t})\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + (e^{4t} - e^t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^{4t} - 2e^{2t} - e^t - e^{-t} \\ e^{4t} + 2e^{2t} - e^t + e^{-t} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(b)

$$y_1' = 4y_1 - y_2, \quad y_2' = 4y_1 + 4y_2, \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0.$$

Solução:
Escreva o sistema como $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ onde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

tem autovalores complexos conjugados $4 \pm 2i$. Assim $e^{tA} = \alpha_t A + \beta_t I$ onde $\alpha_t(4 \pm 2i) + \beta_t = e^{4t}\cos(2t) \pm ie^{4t}\operatorname{sen}(2t)$ donde $4\alpha_t + \beta_t = e^{4t}\cos(2t)$ e $2\alpha_t = e^{4t}\operatorname{sen}(2t)$ e portanto

$$e^{tA} = e^{4t}\begin{pmatrix} \cos(2t) & -\operatorname{sen}(2t)/2 \\ 2\operatorname{sen}(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix}$$

e portanto

$$\mathbf{y}(t) = e^{tA}\mathbf{y}(0) = e^{4t}\begin{pmatrix} \cos(2t) \\ 2\operatorname{sen}(2t) \end{pmatrix}$$

ou

$$y_1(t) = e^{4t}\cos(2t), \quad y_2(t) = 2e^{4t}\operatorname{sen}(2t).$$

2. Resolva o sistema de equações de diferenças abaixo:

$$a_{n+1} = 6a_n - b_n + 1, \quad b_{n+1} = a_n + 4b_n + 1, \quad a_0 = 0, \quad b_0 = 0.$$

Solução:

Escreva

$$\mathbf{y}_{n+1} - A\mathbf{y}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

A matriz A tem autovalor duplo $\lambda = 5$ donde $A^n = \alpha_n A + \beta_n$ onde $5\alpha + \beta = 5^n$, $\alpha = n5^{n-1}$ donde

$$A^n = 5^{n-1} \begin{pmatrix} 5+n & -n \\ n & 5-n \end{pmatrix}.$$

É natural conjecturar que o sistema admita solução particular constante e uma conta fácil dá a solução particular $(-1/4, -1/4)$. Assim a solução geral é

$$\mathbf{y}_n = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 5^{n-1} \begin{pmatrix} 5+n & -n \\ n & 5-n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

e como $\mathbf{y}(0) = 0$ temos $c_1 = c_2 = 1/4$ donde

$$\mathbf{y}_n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5^n - 1 \\ 5^n - 1 \end{pmatrix}, \quad a_n = b_n = \frac{5^n - 1}{4}.$$

3. Considere os seis diagramas de fase desenhados na próxima página. Cada um deles mostra as curvas $(y_1(t), y_2(t))$ onde $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ são soluções da equação $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ para alguma matriz 2×2 real A. As seis matrizes encontram-se entre as oito opções abaixo.

   (a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (e) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

   (f) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

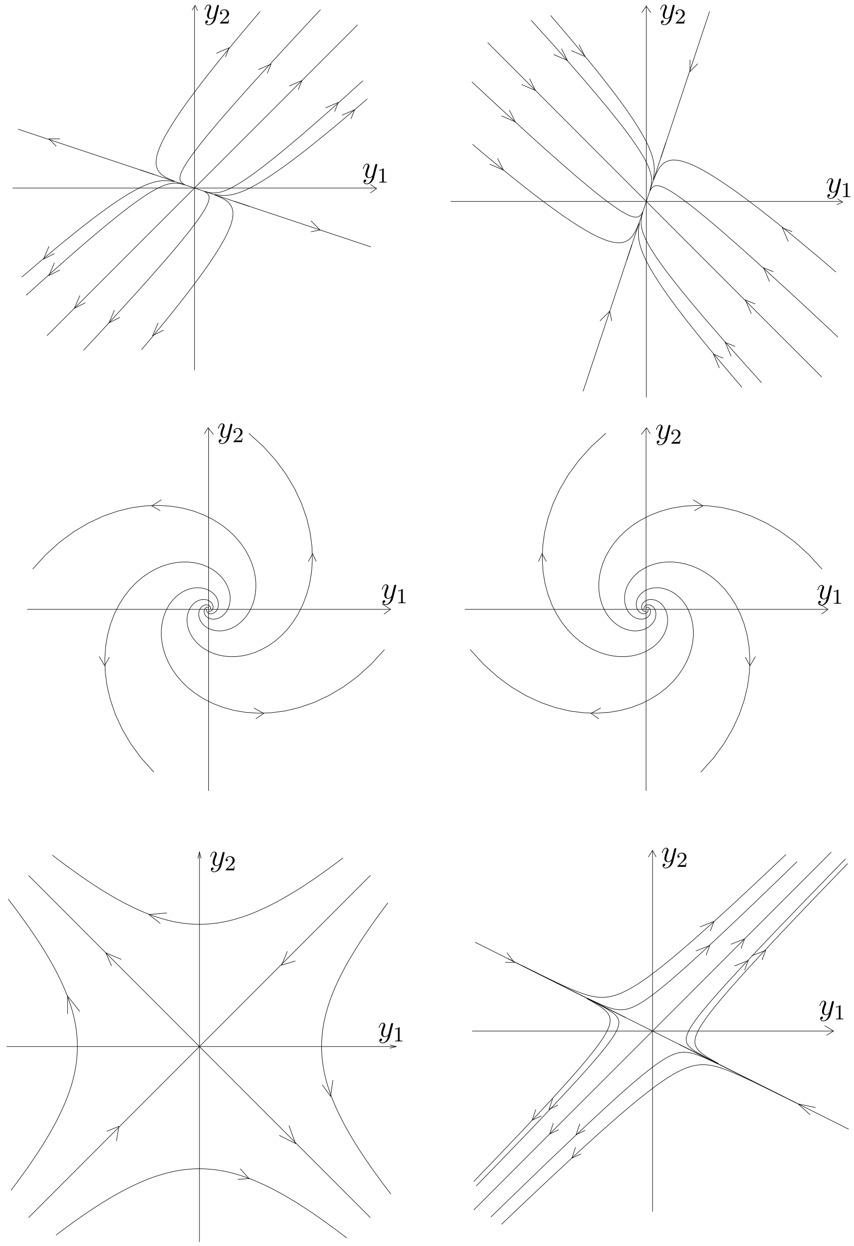
   (g) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

   (h) $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

   Para cada um dos diagramas, identifique a matriz correspondente.

   Solução:

   A correspondência correta é, lendo as figuras por linhas: g, h; e, c; b, f.


y_2
y_1
y_2
y_1
y_2
y_1
y_2
y_1
y_2
y_1
y_2
y_1

4. Para cada uma das matrizes M abaixo, diga se existe uma matriz real A com $e^A = M$. Se existir, dê um exemplo. Se não existir, justifique.

(a)

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solução:

A matriz M tem autovalor duplo $\lambda = 1$; podemos tomar $A = \ln(M)$ o que, pelo cálculo funcional, dá

$$A = M - I = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solução:

A matriz M tem autovalores complexos conjugados $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Temos $\exp(\pm\pi i/2) = \pm i$ donde podemos tomar $\ln(\pm i) = \pm\pi i/2$ e $A = \ln(M) = (\pi/2)M$ ou

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\pi/2 \\ \pi/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Esta não é a única solução; também podemos tomar $A = (2k\pi + (\pi/2))M$, $k \in \mathbb{Z}$.)