P3 de Equações diferenciais e de diferenças

MAT 1154 — 2006.2

Data: 25 de novembro de 2006

Nome: GABARITO ______________________ Matrícula: __________

Assinatura: ______________________ Turma: __________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	3.0		
2a	1.2		
2b	1.2		
2c	0.6		
3a	1.0		
3b	1.0		
4a	1.0		
4b	1.0		
Total	10.0		

Instruções

- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Resolva o problema de valor inicial abaixo:

$$y''(t) + 4y(t) = f(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

onde

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0 \leq t \leq \pi \\ 0, & t \geq \pi. \end{cases}$$

Solução:

Note que $f(t) = \operatorname{sen} t + u_\pi(t) \operatorname{sen}(t - \pi)$. Aplicando a transformada de Laplace temos

$$s^2 Y - s + 4Y = \frac{1}{s^2+1} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$$

donde

$$Y = \frac{1}{s^2+4}\left(s + \frac{1}{s^2+1} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}\right).$$

Temos

$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{1}{3}\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{6}\frac{2}{s^2+4}$$

donde

$$Y = \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{3(s^2+1)} - \frac{2}{6(s^2+4)} + \frac{e^{-\pi s}}{3(s^2+1)} - \frac{2e^{-\pi s}}{6(s^2+4)}$$

e portanto

$$\begin{aligned} y &= \cos(2t) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}(t) - \frac{1}{6}\operatorname{sen}(2t) + u_\pi(t)\left(\frac{1}{3}\operatorname{sen}(t-\pi) - \frac{1}{6}\operatorname{sen}(2(t-\pi))\right) \\ &= \begin{cases} \cos(2t) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}(t) - \frac{1}{6}\operatorname{sen}(2t), & 0 \leq t \leq \pi, \\ \cos(2t) - \frac{1}{3}\operatorname{sen}(2t), & t \geq \pi. \end{cases} \end{aligned}$$

2. Considere o problema de valor inicial abaixo:

$$y''(t) + (1+t^2)y(t) = \frac{1}{1-t^2}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Considere ainda a expansão em série de potências da solução:

$$y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots + a_n t^n + \cdots .$$

(a) Encontre uma equação de diferenças relacionando os coeficientes a_n.

(b) Encontre a_n para $n < 12$.

(c) Diga se o ponto $t = 0$ é ponto de mínimo local de y.

Solução:

(a; primeira opção) Temos

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + \cdots + (n+1)(n+2)a_{n+2}t^n + \cdots ,$$
$$t^2 y = a_0 t^2 + \cdots + a_{n-2}t^n + \cdots ,$$
$$\frac{1}{1-t^2} = 1 + t^2 + t^4 + t^6 + t^8 + \cdots$$

donde

$$\begin{aligned} y'' + (1+t^2)y = (2a_2 + a_0) + (6a_3 + a_1)t + (12a_4 + a_2 + a_0)t^2 + \\ \cdots + ((n+1)(n+2)a_{n+2} + a_n + a_{n-2})t^n + \cdots \end{aligned}$$

e portanto $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ e, para $n \geq 2$,

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + a_n + a_{n-2} = \begin{cases} 1, & n \text{ par}, \\ 0, & n \text{ ímpar}. \end{cases} \qquad (*)$$

(a; segunda opção) Reescreva a equação do enunciado como

$$(1-t^2)y''(t) + (1-t^4)y(t) = 1.$$

Temos

$$t^2 y'' = 2a_2 t^2 + 6a_3 t^3 + 12a_4 t^4 + \cdots + n(n-1)a_n t^n + \cdots ,$$
$$t^4 y = a_0 t^4 + a_1 t^5 + \cdots + a_{n-4}t^n + \cdots$$

donde

$$\begin{aligned} (1-t^2)y''(t) + (1-t^4)y(t) = {}& (2a_2 + a_0) + (6a_3 + a_1)t + \\ & + (12a_4 - 2a_2 + a_2)t^2 + (20a_5 - 6a_3 + a_3)t^3 + \\ & + (30a_6 - 12a_4 + a_4 - a_0)t^4 + \cdots \end{aligned}$$

e portanto $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$ e, para $n \geq 4$,

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} - n(n-1)a_n + a_n - a_{n-4} = 0. \tag{†}$$

(b) Do item (a) segue imediatamente que $a_n = 0$ para n ímpar. Aplicando uma das equações do item (a) temos

$$a_6 = \frac{1}{30}, \quad a_8 = \frac{29}{1680}, \quad a_{10} = \frac{319}{30240}.$$

(c) Sim, $y(0) = 1$ é ponto de mínimo local, pois para t próximo de 0 temos $y(t) \approx 1 + t^6/30 \geq 1$.

3. Em cada um dos itens abaixo é dada uma função F. Encontre f, a transformada de Laplace inversa de F.

(a)

$$F(s) = \frac{s-1}{s^3 - 6s^2 + 13s}$$

Solução:

Aplicando frações parciais, temos

$$F(s) = \frac{A}{s} + \frac{B(s-3) + 2C}{(s-3)^2 + 2^2}$$

e resolvendo encontramos $A = -1/13$, $B = 1/13$, $C = 5/13$ donde

$$f(t) = -\frac{1}{13} + \frac{1}{13}e^{3t}\cos(2t) + \frac{5}{13}e^{3t}\operatorname{sen}(2t).$$

(b)

$$F(s) = \frac{s}{(s-2)^4}$$

Solução:

Temos

$$F(s) = \frac{(s-2)+2}{(s-2)^4} = \frac{1}{(s-2)^3} + \frac{2}{(s-2)^4}$$

donde

$$f(t) = \frac{e^{2t}t^2}{2} + \frac{e^{2t}t^3}{3}.$$

4. Em cada um dos itens abaixo é dada uma função f. Calcule a transformada de Laplace F de cada uma destas funções.

(a)

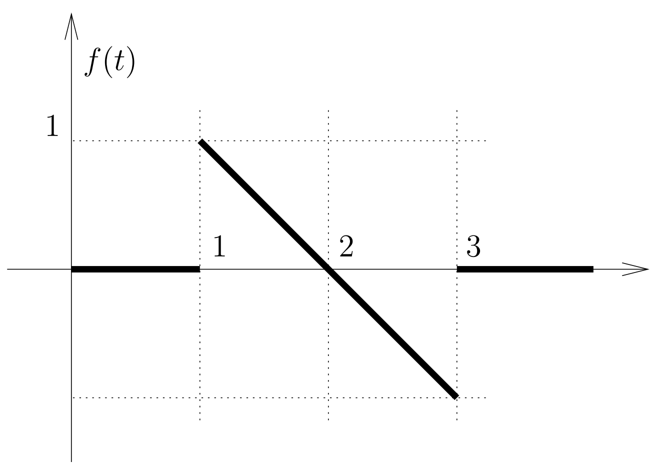
$$f(t) = |t-1|$$

Solução:

Temos $f(t) = 1 - t + 2u_1(t)(t-1)$ donde

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{2e^{-s}}{s^2}.$$

(b) A função f tem o gráfico abaixo:



Solução:

Temos $f(t) = u_1(t)(1-(t-1)) + u_3(t)(1+(t-3))$ donde

$$F(s) = \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-3s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s^2}.$$