P4 de Equações diferenciais e de diferenças
MAT 1154 — 2006.2
Data: 5 de dezembro de 2006

Nome: GABARITO ____________________ Matrícula: ____________
Assinatura: ____________________ Turma: ____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	2.0		
1b	2.0		
1c	2.0		
2	2.0		
3	2.0		
Total	10.0		

Instruções

- Desligue o seu celular.
- Não destaque as folhas da prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Resolva os problemas de valor inicial abaixo:

(a)
$$y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = e^{5t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Primeira solução:
A equação associada $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ tem raiz dupla $\lambda = 3$ donde a solução da equação homogênea associada é

$$y_h(t) = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t}.$$

É natural conjecturar que exista uma solução particular da forma $y_p = C_3 e^{5t}$. Substituinda na equação temos $C_3(25 - 30 + 9)e^{5t} = e^{5t}$ donde $C_3 = 1/4$. Assim a solução geral é

$$y(t) = \frac{1}{4}e^{5t} + C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t};$$

substituindo temos $y(0) = 1/4 + C_1 = 1$ donde $C_1 = 3/4$ e $y'(0) = 5/4 + 9/4 + C_2 = 0$ donde $C_2 = -7/2$. Assim

$$y(t) = \frac{1}{4}e^{5t} + \frac{3}{4}e^{3t} - \frac{7}{2}te^{3t}.$$

Segunda solução:
Aplicando a transformada de Laplace,

$$s^2 Y - s - 6sY + 6 + 9Y = \frac{1}{s-5}$$

donde

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{s^2 - 6s + 9}\left(s - 6 + \frac{1}{s-5}\right) \\ &= \frac{1}{4(s-5)} + \frac{3}{4(s-3)} - \frac{7}{2(s-3)^2} \end{aligned}$$

donde
$$y(t) = \frac{1}{4}e^{5t} + \frac{3}{4}e^{3t} - \frac{7}{2}te^{3t}.$$

(b)

$$y''(t) - 9y'(t) + 20y(t) = \begin{cases} 2-t, & 0 \le t \le 2 \\ 0, & t \ge 2, \end{cases}$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Solução:
O lado direito da equação pode ser reescrito como $2 - t + u_2(t)(t-2)$.
Aplicando a transformada de Laplace,

$$s^2Y - 9sY + 20Y = \frac{2}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2}$$

donde

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{(s-4)(s-5)}\left(\frac{2}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2}\right) \\ &= \frac{2}{s(s-4)(s-5)} - \frac{1}{s^2(s-4)(s-5)} + \frac{e^{-2s}}{s^2(s-4)(s-5)} \end{aligned}$$

Temos

$$\frac{2}{s(s-4)(s-5)} = \frac{1}{10s} - \frac{1}{2(s-4)} + \frac{2}{5(s-5)},$$
$$\frac{1}{s^2(s-4)(s-5)} = \frac{9}{400s} + \frac{1}{20s^2} - \frac{1}{16(s-4)} + \frac{1}{25(s-5)}$$

donde

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{400}\Big(&31 - 20t - 175e^{4t} + 144e^{5t} + \\ &+ u_2(t)\left(9 + 20(t-2) - 25e^{4(t-2)} + 16e^{5(t-2)}\right)\Big). \end{aligned}$$

(c)

$$y'(t) - Ay(t) = b, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Solução:
Temos $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 9$ donde os autovalores de A são $\pm 3i$. Assim, por cálculo funcional,

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \cos(3t)I + \frac{\operatorname{sen}(3t)}{3}A \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3\cos(3t) + 4\operatorname{sen}(3t) & -5\operatorname{sen}(3t) \\ 5\operatorname{sen}(3t) & 3\cos(3t) - 4\operatorname{sen}(3t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

É natural conjecturar que a equação acima tenha uma solucão constante: $-Ay_p = b$ implica $y_p = (3, 3)$. Assim a solução geral é

$$y(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3\cos(3t) + 4\operatorname{sen}(3t) & -5\operatorname{sen}(3t) \\ 5\operatorname{sen}(3t) & 3\cos(3t) - 4\operatorname{sen}(3t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Temos $y(0) = (3, 3) + (c_1, c_2) = (2, 0)$ donde $c_1 = -1$ e $c_2 = -3$ e portanto

$$\begin{aligned} y(t) &= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3\cos(3t) + 4\operatorname{sen}(3t) & -5\operatorname{sen}(3t) \\ 5\operatorname{sen}(3t) & 3\cos(3t) - 4\operatorname{sen}(3t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 - 3\cos(3t) + 11\operatorname{sen}(3t) \\ 9 - 9\cos(3t) + 7\operatorname{sen}(3t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Sabendo que

$$y''(t) - ty'(t) + y(t) = 1, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1,$$

determine $y^{(k)}(0)$ para $k = 2, 3, 4$.

Primeira solução:

Escreva

$$y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \cdots ;$$

temos $a_0 = y(0) = 0$ e $a_1 = y'(0) = 1$. Temos ainda

$$\begin{aligned} y' &= a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + \cdots , \\ ty' &= a_1 t + 2a_2 t^2 + 3a_3 t^3 + 4a_4 t^4 + \cdots , \\ y'' &= 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + \cdots , \\ y'' - ty + y &= (2a_2 + a_0) + 6a_3 t + (12a_4 - a_2)t^2 + \cdots = 1. \end{aligned}$$

donde $2a_2 + a_0 = 1$, $6a_3 = 0$ e $12a_4 - a_2 = 0$ e portanto $a_2 = 1/2$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1/24$. Como $a_k = y^{(k)}(0)/k!$ temos $y''(0) = 1$, $y^{(3)}(0) = 0$, $y^{(4)}(0) = 1$.

Segunda solução:

Substituindo na equação temos $y''(0) + y(0) = 1$ donde $y''(0) = 1$.
Derivando os dois lados da equação diferencial do enunciado temos

$$y^{(3)} - ty'' = 0 \qquad (*)$$

e substituindo $t = 0$ temos $y^{(3)}(0) = 0$. Derivando os dois lados da equação $(*)$ temos

$$y^{(4)} - ty^{(3)} - y'' = 0$$

e substituindo $t = 0$ temos $y^{(4)}(0) - y''(0) = 0$ donde $y^{(4)}(0) = 1$.

3. A seqüência (y_n) satisfaz

$$y_{n+2} = 2y_{n+1} - 2y_n, \quad y_0 = y_1 = 1.$$

Determine y_{38} e y_{39} (simplifique sua resposta).

Primeira solução:

As raízes da equação associada $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ são $\lambda = 1 \pm i = \sqrt{2}e^{\pm\frac{\pi i}{4}}$ donde a solução geral da equação é $y_n = C_1(1+i)^n + C_2(1-i)^n$. Das condições iniciais, $C_1 = C_2 = 1/2$ donde

$$y_n = \frac{1}{2}\left((1+i)^n + (1-i)^n\right) = 2^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

Assim

$$\begin{aligned} y_{38} &= 2^{19}\cos\left(\frac{19\pi}{2}\right) = 0, \\ y_{39} &= 2^{19}\sqrt{2}\cos\left(\frac{39\pi}{4}\right) = 2^{19}\sqrt{2}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2^{19} = 524288. \end{aligned}$$

Segunda solução:

Aplicando a recorrência,

$$y_0 = y_1 = 1, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = -2,$$
$$y_4 = y_5 = -4, \quad y_6 = 0, \quad y_7 = 8.$$

Observamos que $y_{n+4} = -4y_n$. Assim,

$$\begin{aligned} y_{38} &= y_{9\cdot 4+2} = (-4)^9 y_2 = 0, \\ y_{39} &= y_{9\cdot 4+3} = (-4)^9 y_3 = 2^{19} = 524288. \end{aligned}$$

Terceira solução:

Aplicando a recorrência,

$$\begin{gathered} y_0 = y_1 = 1, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = -2, \\ y_4 = y_5 = -2^2, \quad y_6 = 0, \quad y_7 = 2^3, \\ y_8 = y_9 = 2^4, \quad y_{10} = 0, \quad y_{11} = -2^5, \\ y_{12} = y_{13} = -2^6, \quad y_{14} = 0, \quad y_{15} = 2^7, \\ y_{16} = y_{17} = 2^8, \quad y_{18} = 0, \quad y_{19} = -2^9, \\ y_{20} = y_{21} = -2^{10}, \quad y_{22} = 0, \quad y_{23} = 2^{11}, \\ y_{24} = y_{25} = 2^{12}, \quad y_{26} = 0, \quad y_{27} = -2^{13}, \\ y_{28} = y_{29} = -2^{14}, \quad y_{30} = 0, \quad y_{31} = 2^{15}, \\ y_{32} = y_{33} = 2^{16}, \quad y_{34} = 0, \quad y_{35} = -2^{17}, \\ y_{36} = y_{37} = -2^{18}, \quad y_{38} = 0, \quad y_{39} = 2^{19}. \end{gathered}$$