P2 de Equações diferenciais e de diferenças

MAT 1154 — 2007.1

Data: 12 de maio de 2007

Nome: GABARITO ______________________ Matrícula: ____________

Assinatura: ______________________ Turma: ____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	2.0		
1b	2.0		
2	2.0		
3	2.0		
4a	1.0		
4b	1.0		
Total	10.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou caneta preta.
  Não use caneta vermelha ou verde.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Resolva os problemas de valor inicial abaixo:

   (a)

$$\mathbf{y}' - A\mathbf{y} = b(t), \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} -4t+1 \\ -t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solução: O único autovalor de A é $\lambda = 3$ (autovalor duplo) donde $e^{tA} = \alpha_t A + \beta_t I$ onde $3\alpha_t + \beta_t = e^{3t}$ e $\alpha_t = te^{3t}$ donde $\beta_t = (1-3t)e^{3t}$ e portanto

$$e^{tA} = te^{3t}A + (1-3t)e^{3t}I = e^{3t}\begin{pmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix}.$$

É natural conjecturar que exista uma solução particular da forma

$$\mathbf{y}_p(t) = \begin{pmatrix} C_3 t + C_4 \\ C_5 t + C_6 \end{pmatrix}$$

o que dá

$$\mathbf{y}_p'(t) - A\mathbf{y}_p(t) = \begin{pmatrix} (-4C_3 + C_5)t + (C_3 - 4C_4 + C_6) \\ (-C_3 - 2C_5)t + (C_5 - C_4 - 2C_6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4t+1 \\ -t \end{pmatrix}$$

o que dá $C_3 = 1$, $C_4 = C_5 = C_6 = 0$ donde a solução geral é

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + e^{3t}\begin{pmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Substituindo as condições iniciais,

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} t + e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}.$$

(b)

$$y_1' = 3y_1 - 2y_2, \quad y_2' = 2y_1 + 3y_2, \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0.$$

Solução:
O sistema pode ser reescrito como $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ onde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

tem autovalores $3 \pm 2i$ donde

$$\exp(tA) = e^{3t} \begin{pmatrix} \cos(2t) & -\operatorname{sen}(2t) \\ \operatorname{sen}(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix}$$

e substituindo as condições iniciais obtemos

$$y_1(t) = e^{3t}\cos(2t), \quad y_2(t) = e^{3t}\operatorname{sen}(2t).$$

2. Resolva o sistema de equações de diferenças abaixo:

$$a_{n+1} = 4a_n + 4b_n + 7, \quad b_{n+1} = a_n + 4b_n + 4, \quad a_0 = 1, \quad b_0 = -2.$$

Solução:

O sistema pode ser reescrito como

$$\mathbf{y}_{n+1} - A\mathbf{y}_n = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

O sistema homogêneo associado $\tilde{\mathbf{y}}_{n+1} - A\tilde{\mathbf{y}}_n = 0$ tem solução $\tilde{\mathbf{y}}_n = A^n \tilde{\mathbf{y}}_0$; a matrix A tem autovalores 2 e 6 donde $A^n = \alpha_n A + \beta_n I$ onde $6\alpha_n + \beta_n = 6^n$ e $2\alpha_n + \beta_n = 2^n$ donde $\alpha_n = (6^n - 2^n)/4$ e $\beta_n = (3 \cdot 2^n - 6^n)/2$ donde

$$A^n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2(6^n + 2^n) & 4(6^n - 2^n) \\ 6^n - 2^n & 2(6^n + 2^n) \end{pmatrix}.$$

É natural conjecturar que exista uma solução particular constante e por substituição verificamos facilmente que $a_n = b_n = -1$ de fato é solução. Assim a solução geral é

$$\mathbf{y}_n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2(6^n + 2^n) & 4(6^n - 2^n) \\ 6^n - 2^n & 2(6^n + 2^n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e substituindo as condições iniciais encontramos $C_1 = 2$, $C_2 = -1$. Substituindo e simplificando encontramos

$$a_n = 2^{n+1} - 1, \quad b_n = -2^n - 1.$$

3. Considere os quatro diagramas de fase desenhados na próxima página. Cada um deles mostra as curvas $(y_1(t), y_2(t))$ onde $y = (y_1, y_2)$ são soluções da equação $y' = Ay$ para alguma matriz 2×2 real A. As quatro matrizes encontram-se entre as oito opções abaixo.

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

   (e) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

   (f) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

   (g) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

   (h) $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

   Para cada um dos diagramas, identifique a matriz correspondente.

   Solução:

   Os autovalores das matrizes dadas são

   (a) 1 e -1: sela,

   (b) 1, autovalor duplo, não diagonalizável: repulsor com figura S,

   (c) $\pm\sqrt{5}\, i$: órbitas periódicas,

   (d) 5 e -1: sela,

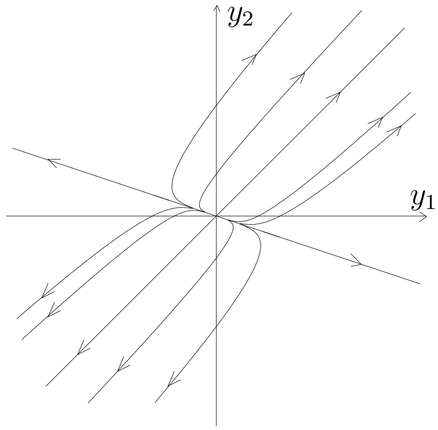
   (e) $1 \pm 2i$: espiral para fora,

   (f) $-1 \pm 2i$: espiral para dentro,

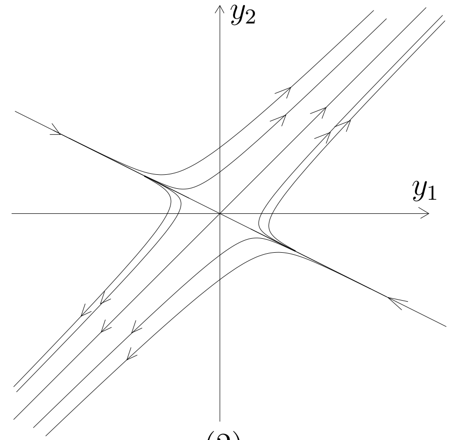
   (g) 5 e 1: repulsor com duas direções invariantes,

   (h) -5 e -1: atrator com duas direções invariantes.

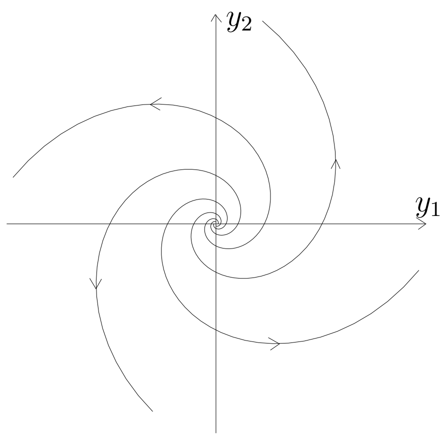
   Vejamos agora as figuras...



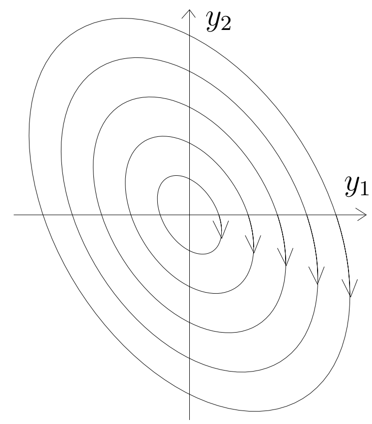
(1)



(2)



(3)



(4)

Continuação da solução:

A figura (1) só pode ser (g). (2) poderia ser (a) ou (d), mas (a) tem autovetor $(1, 0)$, o que não corresponde à figura, donde (2) deve ser (d). (3) só pode ser (e) e (4) só pode ser (c).

4. Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa; justifique brevemente.

   (a) Sejam A_1 e A_2 matrizes reais 2×2. Se $\exp(A_1) = \exp(A_2)$ então $A_1 = A_2$.

   Solução:

   FALSA. Para verificar isto basta dar um exemplo, como

$$A_1 = 0, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}, \quad \exp(A_1) = \exp(A_2) = I.$$

   (b) Sejam A_1 e A_2 matrizes reais 2×2. Se $\exp(tA_1) = \exp(tA_2)$ para todo t real com $-1 < t < 1$ então $A_1 = A_2$.

   Solução:

   VERDADEIRA. Seja $F_1(t) = \exp(tA_1)$, $F_2(t) = \exp(tA_2)$. Sabemos que $F_1'(t) = A_1 \exp(tA_1)$, $F_2'(t) = A_2 \exp(tA_2)$. A hipótese diz que $F_1(t) = F_2(t)$ para todo $t \in (-1, 1)$ donde $F_1'(0) = F_2'(0)$. Mas $F_1'(0) = A_1$ e $F_2'(0) = A_2$ e deduzimos que $A_1 = A_2$.