P4 de Equações diferenciais e de diferenças
MAT 1154 — 2007.1
Data: 29 de junho de 2007

Nome: GABARITO ______________________ Matrícula: ____________
Assinatura: ______________________ Turma: ____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	2.0		
1b	2.0		
1c	2.0		
2	2.0		
3	2.0		
Total	10.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou caneta preta.
  Não use caneta vermelha ou verde.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Resolva os problemas de valor inicial abaixo:

   (a)
$$y''(t) + 4y'(t) + 8y(t) = e^{-2t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Primeira solução:
A equação algébrica associada $\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0$ tem raízes complexas conjugadas $-2 \pm 2i$ donde a solução da equação homogênea associada é $y_h = C_1 e^{-2t}\cos(2t) + C_2 e^{-2t}\operatorname{sen}(2t)$. É natural conjecturar que exista uma solução particular da forma $y_p(t) = C_3 e^{-2t}$. De fato, substituindo temos
$$y_p''(t) + 4y_p'(t) + 8y_p(t) = (4 - 8 + 8)C_3 e^{-2t} = e^{-2t}$$
o que dá uma solução para $C_3 = 1/4$. Assim a solução geral é
$$y(t) = \frac{1}{4}e^{-2t} + C_1 e^{-2t}\cos(2t) + C_2 e^{-2t}\operatorname{sen}(2t)$$
o que dá $y(0) = 1/4 + C_1 = 1$ donde $C_1 = 3/4$ e
$y'(0) = -1/2 - 3/2 + 2C_2 = 0$ donde $C_2 = 1$. Assim
$$y(t) = \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{3}{4}e^{-2t}\cos(2t) + e^{-2t}\operatorname{sen}(2t).$$

Segunda solução:
Aplicando a transformada de Laplace aos dois lados da equação temos
$$s^2Y - s + 4sY - 4 + 8Y = \frac{1}{s+2}$$
donde
$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{(s+2)^2 + 2^2}\left(s + 4 + \frac{1}{s+2}\right) \\ &= \frac{s^2 + 6s + 9}{(s+2)((s+2)^2 + 2^2)} \\ &= \frac{1}{4}\,\frac{1}{s+2} + \frac{3}{4}\,\frac{s+2}{(s+2)^2 + 2^2} + \frac{2}{(s+2)^2 + 2^2} \end{aligned}$$
donde
$$y(t) = \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{3}{4}e^{-2t}\cos(2t) + e^{-2t}\operatorname{sen}(2t).$$

(b)

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0 \le t \le \pi \\ 0, & t \ge \pi, \end{cases}$$

$$y(0) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = 0.$$

Solução:

O lado direito da equação pode ser escrito como
$\operatorname{sen}(t) + u_\pi(t)\operatorname{sen}(t-\pi)$. Assim, aplicando a transformada de Laplace temos

$$s^2Y - \frac{s}{2} - 2sY + 1 + Y = \frac{1}{s^2+1} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$$

donde

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{(s-1)^2}\left(\frac{s}{2} - 1 + \frac{1}{s^2+1} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{s}{s^2+1} + e^{-\pi s}\left(-\frac{1}{2}\,\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{2}\,\frac{s}{s^2+1}\right) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2}\left(\cos t + u_\pi(t)\left(-e^{t-\pi} + (t-\pi)e^{t-\pi} + \cos(t-\pi)\right)\right) \\ &= \begin{cases} \frac{\cos t}{2}, & 0 \le t \le \pi, \\ \frac{(t-\pi-1)e^{t-\pi}}{2}, & t \ge \pi. \end{cases} \end{aligned}$$

(c)

$$y'(t) - Ay(t) = b(t), \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solução:
Os autovalores de A são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 4$ correspondentes aos autovetores $v_1 = (1, -1)$ e $v_2 = (1, 1)$. Assim a solução da equação homogênea associada é

$$y_h(t) = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

É natural conjecturar que haja uma solução da forma

$$y(t) = \begin{pmatrix} C_3 t + C_4 \\ C_5 t + C_6 \end{pmatrix};$$

substituindo verificamos que isto de fato ocorre para $C_3 = -1/2$, $C_4 = -1/4$, $C_5 = 1/2$, $C_6 = 1/4$ donde a solução geral é

$$y(t) = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2t + 1 \\ -2t - 1 \end{pmatrix} + C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Substituindo obtemos $C_1 = 1/4$ e $C_2 = 1$ donde

$$y(t) = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2t + 1 \\ -2t - 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\, e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Sabendo que

$$y''(t) - ty'(t) + (1+t^2)y(t) = \frac{1}{1-t^2}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

determine $y^{(k)}(0)$ para $k = 2, 3, 4, 5, 6$.

Solução:

Escreva

$$y(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_k t^k + \cdots$$

onde $a_k = y^{(k)}(0)/k!$; temos $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ e

$$\begin{aligned} y''(t) &= 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3 + 30a_6 t^4 + \cdots \\ ty'(t) &= a_1 t + 2a_2 t^2 + 3a_3 t^3 + 4a_4 t^4 + \cdots \\ t^2 y(t) &= a_0 t^2 + a_1 t^3 + a_2 t^4 + \cdots \end{aligned}$$

e como

$$\frac{1}{1-t^2} = 1 + t^2 + t^4 + \cdots$$

temos

$$\begin{array}{rccc} 2a_2 & & +a_0 & = 1 \\ 6a_3 & - \ a_1 & +a_1 & = 0 \\ 12a_4 & -2a_2 & +a_2 + a_0 & = 1 \\ 20a_5 & -3a_3 & +a_3 + a_1 & = 0 \\ 30a_6 & -4a_4 & +a_4 + a_2 & = 1 \end{array}$$

donde $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$ e $a_6 = 1/30$. Assim

$$y^{(2)}(0) = y^{(3)}(0) = y^{(4)}(0) = y^{(5)}(0) = 0, \quad y^{(6)}(0) = 24.$$

3. A seqüência (y_n) satisfaz

$$y_{n+2} = 3y_{n+1} - y_n, \quad y_0 = 1, \quad \lim_{n\to+\infty} y_n = 0.$$

Determine y_n.

Solução:

As raízes de $\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$ são

$$\lambda_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

A solução geral da equação é

$$y_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n.$$

Note que $2 < \sqrt{5} < 3$ donde $0 < \lambda_1 < 1$ e $\lambda_2 > 1$ donde

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_1^n = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \lambda_2^n = +\infty$$

assim a condição

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$$

implica que $C_2 = 0$. Assim

$$y_n = C_1\lambda_1^n$$

e como $y_0 = 1$ temos $C_1 = 1$. Assim

$$y_n = \lambda_1^n = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$