P1 de Equações diferenciais e de diferenças
MAT 1154 — 2007.2
Data: 15 de setembro de 2007

Nome: **GABARITO** ____________________________ Matrícula:____________
Assinatura:____________________________________ Turma:____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	2.0		
1b	2.0		
2a	1.5		
2b	1.5		
3a	1.0		
3b	1.0		
3b	1.0		
Total	10.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou preta. Não use caneta vermelha ou verde.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Resolva os problemas de valor inicial abaixo, isto é, encontre a função $y(x)$ que satisfaz a equação diferencial e as condições iniciais dadas.

   (a)
$$y' - (\tan x)y = 1, \quad y(0) = 1.$$

Solução:

A equação é linear; vamos primeiro resolver a equação homogênea associada:

$$\begin{aligned} y_h' - (\tan x)y_h &= 0 \\ \int \frac{dy_h}{y_h} &= \int \tan x \, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x \, dx}{\cos x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} \\ \ln(y_h) &= -\ln(\cos x) \\ y_h &= \sec x. \end{aligned}$$

Para encontrar uma solução particular, escreva $y_p = z \sec x$ e substitua na equação:

$$z' \sec x = 1, \quad z' = \cos x, \quad z = \operatorname{sen} x, \quad y_p = \tan x$$

donde a solução geral é

$$y = \tan x + C \sec x.$$

Temos $y(0) = C = 1$ donde

$$y = \tan x + \sec x.$$

(b)

$$y'' + 6y' + 9y = e^{-x}\cos(2x), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Solução:

A equação algébrica associada é $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ que tem raiz dupla $\lambda = -3$, donde a solução da equação homogênea associada é $C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$.

É natural conjecturar que exista uma solução particular da forma

$$y_p(x) = C_3 c(x) + C_4 s(x), \quad c(x) = e^{-x}\cos(2x), \quad s(x) = e^{-x}\operatorname{sen}(2x).$$

Temos

$$c'(x) = -c(x) - 2s(x), \quad s'(x) = 2c(x) - s(x)$$

donde

$$\begin{aligned}
y_p'(x) &= (-C_3 + 2C_4)c(x) + (-2C_3 - C_4)s(x), \\
y_p''(x) &= (-(-C_3 + 2C_4) + 2(-2C_3 - C_4))c(x) \\
&\quad + (-2(-C_3 + 2C_4) - (-2C_3 - C_4))s(x) \\
&= (-3C_3 - 4C_4)c(x) + (4C_3 - 3C_4)s(x), \\
y_p''(x) + 6y_p'(x) + 9y_p(x) &= (-3C_3 - 4C_4)c(x) + (4C_3 - 3C_4)s(x) \\
&\quad + 6(-C_3 + 2C_4)c(x) + 6(-2C_3 - C_4)s(x) \\
&\quad + 9C_3 c(x) + 9C_4 s(x) \\
&= 8C_4 c(x) - 8C_3 s(x).
\end{aligned}$$

Queremos $8C_4 c(x) - 8C_3 s(x) = c(x)$ o que é satisfeito por $C_3 = 0$, $C_4 = 1/8$. Assim a solução geral é

$$y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x} + \frac{1}{8} e^{-x}\operatorname{sen}(2x).$$

Temos $y(0) = C_1 = 0$ e $y'(0) = -3C_1 + C_2 + 1/4$ donde

$$y(x) = -\frac{1}{4} x e^{-3x} + \frac{1}{8} e^{-x}\operatorname{sen}(2x).$$

2. Considere a equação de diferenças abaixo:

$$y_{n+2} - 6y_{n+1} + y_n = 8, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = 4.$$

(a) Encontre uma fórmula para y_n.

(b) Calcule

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln y_n}{n}.$$

Solução:

(a) A equação algébrica associada $\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0$ tem raízes $\lambda_1 = 3 + 2\sqrt{2} \approx 5.8$ e $\lambda_2 = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0.2$. É natural conjecturar que exista uma solução particular constante: substituindo $y_n = C$ na equação temos $C - 6C + C = -4C = 8$ donde $C = -2$. Assim a solução geral é

$$y_n = C_1(3 + 2\sqrt{2})^n + C_2(3 - 2\sqrt{2})^n - 2.$$

Fazendo $n = 0$ e $n = 1$ deduzimos que $C_1 = C_2 = 1$, ou seja,

$$y_n = (3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^n - 2.$$

(b) Temos

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{y_n}{(3+2\sqrt{2})^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + (3 - 2\sqrt{2})^{2n} - 2(3 - 2\sqrt{2})^n\right) = 1$$

donde, tirando logaritmos,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\ln y_n - n\ln(3 + 2\sqrt{2})\right) = 0$$

donde

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln y_n}{n} = \ln(3 + 2\sqrt{2}) + \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln y_n - n\ln(3 + 2\sqrt{2})}{n} = \ln(3 + 2\sqrt{2}).$$

3. Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique brevemente.

(a) Seja (y_n) a seqüência definida por

$$y_{n+2} - 14y_{n+1} + 50y_n = 0, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = 1.$$

Então $y_n > 0$ para todo $n > 0$.

Solução:

FALSA. De fato, temos

$$y_n = \frac{1}{2i}(7+i)^n - \frac{1}{2i}(7-i)^n = (5\sqrt{2})^n \operatorname{sen}(n \arctan(1/7))$$

que é negativo para valores de n tais que $\pi < n \arctan(1/7) < 2\pi$.

(b) Seja y a solução de

$$y' - \cos(x^5 - 5x + 11)y = 0, \quad y(0) = 1.$$

Então $y(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução:

VERDADEIRA. Temos

$$y(x) = \exp\left(\int_0^x \cos(t^5 - 5t + 11)\, dt\right) > 0$$

pois a exponencial de qualquer número real é positiva.

(c) Seja y a solução de

$$y' - x\cos(x+y) = 0, \quad y(0) = 0.$$

Então $-1 \leq y(1) \leq 1$.

Solução:

VERDADEIRA. Temos $y' = x\cos(x+y)$ donde $|y'(x)| \leq 1$ para todo $x \in [0,1]$. Assim

$$|y(1)| \leq \int_0^1 |y'(t)| dt \leq 1.$$