# P2 de Equações diferenciais e de diferenças
# MAT 1154 — 2007.2
# Data: 20 de outubro de 2007

Nome:________________________________ Matrícula:____________
Assinatura:____________________________ Turma:____________

| Questão | Valor | Nota | Revisão |
|---|---|---|---|
| 1a | 2.5 | | |
| 1b | 2.0 | | |
| 2 | 2.5 | | |
| 3a | 0.7 | | |
| 3b | 0.7 | | |
| 4a | 0.8 | | |
| 4b | 0.8 | | |
| Total | 10.0 | | |

## Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou caneta preta.
  Não use caneta vermelha ou verde.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Resolva os problemas de valor inicial abaixo:

   (a)

$$\mathbf{y}' - A\mathbf{y} = b(t), \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b)

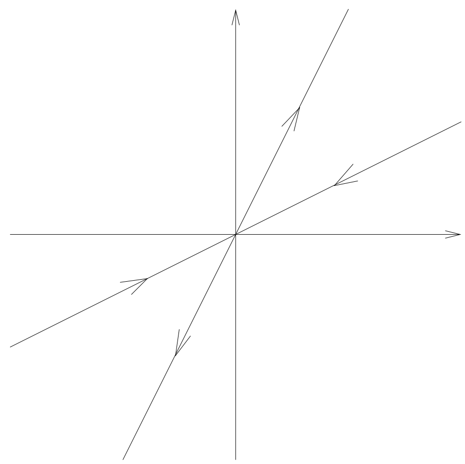
$$y_1' = y_1 - 10y_2, \quad y_2' = 5y_1 - y_2, \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0.$$

2. Resolva o sistema de equações de diferenças abaixo:

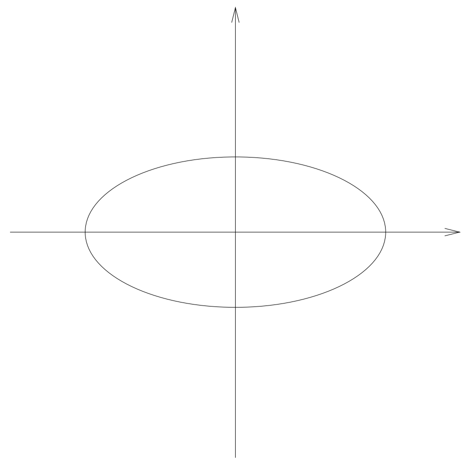
$$a_{n+1} = 5a_n - b_n + 3, \quad b_{n+1} = 4a_n + b_n + 4, \quad a_0 = 1, \quad b_0 = 0.$$

3. Em cada item, dê um exemplo de uma matrix real $2 \times 2$ tal que o diagrama de fase e as soluções de $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ satisfaçam a descrição dada.

   (a) As retas $y_2 = 2y_1$ e $y_2 = y_1/2$ aparecem no diagrama de fase. Na primeira reta as setas apontam para fora e na segunda as setas apontam para dentro.



(b) As curvas no diagrama de fase são elipses centradas na origem. Uma das elipses passa pelos pontos $(2, 0)$ e $(0, 1)$.



4. Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa; justifique brevemente.

   (a) Seja $A$ uma matriz real $2 \times 2$. Se a função $\mathbf{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ é solução de $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ e satisfaz $\mathbf{y}(0) = (1, 0)$ e $\mathbf{y}(1) = (-1, 0)$ então os autovalores de $A$ são $\pm\pi i$.

   (b) Seja $A$ uma matriz real $2 \times 2$. Se a função $\mathbf{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ é solução de $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ e satisfaz $\mathbf{y}(0) = (1, 0)$ e $\mathbf{y}(1) = (-1, 0)$ então temos $\mathbf{y}(2) = (1, 0)$.