P4 de Equações diferenciais e de diferenças
MAT 1154 — 2007.2
Data: 1 de dezembro de 2007

Nome: GABARITO ______________________ Matrícula: __________
Assinatura: ______________________ Turma: __________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	2.0		
1b	2.0		
1c	2.0		
2	2.0		
3a	1.0		
3b	1.0		
Total	10.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou caneta preta.
  Não use caneta vermelha ou verde.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Resolva os problemas de valor inicial abaixo:

   (a)
$$y''(t) + 6y'(t) + 10y(t) = 5e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Primeira solução: As raízes de $\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$ são $-3 \pm i$ donde as soluções da equação homogênea associada são da forma

$$C_1 e^{-3t} \cos t + C_2 e^{-3t} \operatorname{sen} t.$$

É natural conjecturar que exista uma solução particular da forma $y_p = Ce^{-t}$. Substituindo temos

$$y_p'' + 6y_p' + 10y_p = (1 - 6 + 10)Ce^{-t} = 5Ce^{-t} = 5e^{-t}$$

donde temos uma solução particular para $C = 1$. Assim a solução geral é

$$y = e^{-t} + C_1 e^{-3t} \cos t + C_2 e^{-3t} \operatorname{sen} t.$$

Temos $y(0) = 1 + C_1 = 0$ e $y'(0) = -1 - 3C_1 + C_2 = 1$ donde $C_1 = -1$ e $C_2 = -1$ donde

$$y = e^{-t} - e^{-3t} \cos t - e^{-3t} \operatorname{sen} t.$$

Segunda solução: Aplicando Laplace aos dois lados da equação temos

$$s^2 Y - 1 + 6sY + 10Y = \frac{5}{s+1}$$

donde

$$Y = \frac{s+6}{(s+1)(s^2+6s+10)} = \frac{1}{s+1} - \frac{s+3}{(s+3)^2+1^2} - \frac{1}{(s+3)^2+1^2}$$

donde

$$y = e^{-t} - e^{-3t} \cos t - e^{-3t} \operatorname{sen} t.$$

(b)

$$\frac{1}{81}\,y''(t) - \frac{1}{9}\,y(t) = \begin{cases} 1-t^2, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & t \ge 1, \end{cases}$$

$$y(0) = -7, \quad y'(0) = 0.$$

Solução: O lado direito da equação é
$f(t) = 1 - t^2 + u_1(t)((t-1)^2 + 2(t-1))$ donde

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^3} + e^{-s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2}\right).$$

Aplicando Laplace aos dois lados da equação temos

$$\frac{1}{81}s^2 Y + \frac{7}{81}s - \frac{1}{9}Y = F(s)$$

donde

$$\begin{aligned} Y &= \frac{-7s^4 + 81s^2 - 162}{s^3(s^2-9)} + e^{-s}\,\frac{162(s+1)}{s^3(s^2-9)} \\ &= \frac{18}{s^3} - \frac{7}{s} + e^{-s}\left(-\frac{2}{s} - \frac{18}{s^2} - \frac{18}{s^3} + \frac{4}{s-3} - \frac{2}{s+3}\right). \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} y(t) &= 9t^2 - 7 + \\ &\qquad + u_1(t)\left(-2 - 18(t-1) - 9(t-1)^2 + 4e^{3(t-1)} - 2e^{-3(t-1)}\right) \\ &= \begin{cases} 9t^2 - 7, & 0 \le t \le 1, \\ 4e^{3(t-1)} - 2e^{-3(t-1)}, & t \ge 1. \end{cases} \end{aligned}$$

(c)

$$y'(t) - Ay(t) = b(t), \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 1-5t \\ -1+5t \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solução: A matriz A tem autovalor duplo $\lambda = 5$ donde

$$\exp(tA) = e^{5t} \begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix}.$$

Por outro lado é natural conjecturar que exista uma solução particular y_p da forma

$$y(t) = \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \end{pmatrix}.$$

Substituindo verificamos que de fato temos a solução

$$y_p = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}$$

donde a solução geral é da forma

$$y(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} + e^{5t} \begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Pela condição inicial temos $c_1 = c_2 = 1$ donde

$$y(t) = \begin{pmatrix} t + e^{5t}(1+2t) \\ -t + e^{5t}(1-2t) \end{pmatrix}.$$

2. A seqüência (y_n) satisfaz

$$y_{n+2} = 13y_{n+1} - 36y_n, \quad y_0 = 5, \quad y_1 = 7.$$

Calcule

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n}.$$

Solução: As raízes de $\lambda^2 = 13\lambda - 36$ são $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 9$. Assim temos $y_n = C_1 4^n + C_2 9^n$. Substituindo temos $y_0 = C_1 + C_2 = 5$ e $y_1 = 4C_1 + 9C_2 = 7$ donde $C_1 = 38/5$, $C_2 = -13/5$ e

$$y_n = \frac{38 \cdot 4^n - 13 \cdot 9^n}{5}.$$

Temos

$$\begin{aligned} \frac{y_{n+1}}{y_n} &= \frac{38 \cdot 4^{n+1} - 13 \cdot 9^{n+1}}{38 \cdot 4^n - 13 \cdot 9^n} \\ &= 9\,\frac{1 - \frac{38}{13}\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}}{1 - \frac{38}{13}\left(\frac{4}{9}\right)^{n}} \end{aligned}$$

donde

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = 9.$$

3. Determine o coeficiente a_n da expansão em série de potências

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n + \cdots$$

para cada uma das funções abaixo:

(a)

$$f(t) = \frac{1}{1-t^2}.$$

Solução: Sabemos (soma da P.G. infinita) que

$$\frac{1}{1-X} = 1 + X + X^2 + \cdots$$

e fazendo $X = t^2$ temos

$$\frac{1}{1-t^2} = 1 + t^2 + t^4 + \cdots$$

donde

$$a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ par}, \\ 0, & n \text{ ímpar}. \end{cases}$$

(b)

$$f(t) = \int_0^t \frac{e^\tau - 1}{\tau}\, d\tau.$$

Solução: Temos

$$\begin{aligned} e^t &= 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + \cdots \\ e^t - 1 &= t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + \cdots \\ \frac{e^t - 1}{t} &= 1 + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \cdots + \frac{t^n}{(n+1)!} + \cdots \\ f(t) &= t + \frac{t^2}{2 \cdot 2!} + \frac{t^3}{3 \cdot 3!} + \cdots + \frac{t^n}{n \cdots n!} + \cdots \end{aligned}$$

donde

$$a_n = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \frac{1}{n \cdot n!}, & n > 0. \end{cases}$$