P1 de Equações diferenciais e de diferenças
MAT 1154 — 2008.1
Data: 5 de abril de 2008

Nome: **GABARITO** ______________________ Matrícula: ____________
Assinatura: ______________________________ Turma: ____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	2.0		
1b	2.0		
2a	1.0		
2b	1.0		
2b	1.0		
3a	1.0		
3b	1.0		
4	1.0		
Total	10.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou preta. Não use caneta vermelha ou verde.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Resolva os problemas de valor inicial abaixo, isto é, encontre a função $y(x)$ que satisfaz a equação diferencial e as condições iniciais dadas.

   (a)
$$y' - \frac{x+1}{x}\, y = x, \quad y(1) = 0.$$

   Solução:
   A equação é linear; vamos primeiro resolver a equação homogênea associada:

$$\begin{aligned} y_h' - \frac{x+1}{x}\, y_h &= 0 \\ \int \frac{dy_h}{y_h} &= \int \frac{x+1}{x}\, dx \\ \ln(y_h) &= x + \ln(x) \\ y_h &= x\, e^x. \end{aligned}$$

   Para encontrar uma solução particular, escreva $y_p = zxe^x$ (donde $y_p' = z'xe^x + z(x+1)e^x$) e substitua na equação:

$$z'xe^x = x, \quad z' = e^{-x}, \quad z = -e^{-x}, \quad y_p = -x$$

   donde a solução geral é

$$y = -x + Cx\, e^x = x(Ce^x - 1).$$

   Temos $y(1) = -1 + Ce = 0$ donde

$$y = x(e^{(x-1)} - 1).$$

(b)

$$y'' + 6y' + 25y = 25x + 31, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Solução: As raízes da equação algébrica associada $\lambda^2 + 6\lambda + 25 = 0$ são os complexos conjugados $-3 \pm 4i$ donde a solução da equação homogênea associada é

$$y_h = C_1 e^{-3x} \cos(4x) + C_2 e^{-3x} \operatorname{sen}(4x).$$

É natural conjecturar que exista uma solução particular da forma $y_p = C_3 x + C_4$. Substituindo temos

$$y_p'' + 6y_p' + 25y_p = 25C_3 x + (6C_3 + 25C_4) = 25x + 31$$

donde $C_3 = C_4 = 1$ e a solução geral da equação é

$$y = C_1 e^{-3x} \cos(4x) + C_2 e^{-3x} \operatorname{sen}(4x) + x + 1.$$

Temos $y(0) = C_1 + 1 = 1$ donde $C_1 = 0$. Temos agora $y'(0) = 4C_2 + 1 = 0$ donde $C_2 = -1/4$ e

$$y = -\frac{1}{4} e^{-3x} \operatorname{sen}(4x) + x + 1.$$

2. Considere a equação de diferenças abaixo:

$$y_{n+2} + y_{n+1} - y_n = 0.$$

(a) Encontre a solução geral da equação.

(b) Diga se existe solução com $y_0 = 1$ e $y_n > 0$ para todo inteiro $n > 0$; se existir, determine os possíveis valores de y_1.

(c) Diga se existe solução com $y_0 = -1$ e $y_n > 0$ para todo inteiro $n > 0$; se existir, determine os possíveis valores de y_1.

Solução:

(a) A equação algébrica associada $\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ tem raízes

$$\lambda_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1.6, \quad \lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.6.$$

A solução geral é

$$y_n = C_1 \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

(b) Observe que o sinal de λ_1^n alterna (positivo para n par, negativo para n ímpar). Como $|\lambda_1| > 1 > |\lambda_2|$ o sinal de y_n é determinado pelo sinal de $C_1 \lambda_1^n$ e portanto alterna para n suficientemente grande *exceto* se $C_1 = 0$. Assim as únicas soluções com sinal constante são da forma

$$y_n = C_2 \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Se $C_2 = 1$ temos $y_n = \lambda_2^n > 0$ para todo n, a única solução satisfazendo as condições do enunciado; neste caso

$$y_1 = \lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

(c) Pelo que vimos no item anterior, para que os sinais não alternem a solução deve ser da forma

$$y_n = C_2 \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)^n;$$

mas neste caso todos os termos têm o sinal de y_0. Assim não existe solução satisfazendo as condições do enunciado.

3. Considere a equação de diferenças abaixo:

$$y_{n+1} + \frac{(y_n)^2}{3} = \frac{7}{3}, \quad y_0 = \sqrt{10}.$$

(a) Calcule y_n para $n = 1, 2, \ldots, 5$.

(b) Calcule y_{2008}.

Solução: (a) Aplicando a equação temos

$$y_1 = -1, \quad y_2 = 2, \quad y_3 = 1, \quad y_4 = 2, \quad y_5 = 1.$$

(b) Pelos últimos termos calculados no item anterior vemos que

$$y_n = \begin{cases} 2, & y \text{ par}, y \geq 2; \\ 1, & y \text{ ímpar}, y \geq 3; \end{cases}$$

e portanto $y_{2008} = 2$.

4. Obtenha uma equação diferencial linear de primeira ordem (i.e., uma equação da forma $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$) que admita as duas seguintes soluções:
$$y_1(x) = x, \quad y_2(x) = e^x.$$

Solução: Substituindo na equação temos

$$\begin{aligned} 1 + a(x)x &= b(x), \\ e^x + a(x)e^x &= b(x) \end{aligned}$$

donde

$$a(x) = -\frac{e^x - 1}{e^x - x}, \quad b(x) = 1 - x\,\frac{e^x - 1}{e^x - x}$$

e a equação é

$$y'(x) - \frac{e^x - 1}{e^x - x}\,y(x) = 1 - x\,\frac{e^x - 1}{e^x - x}.$$