

P2 de Equações diferenciais e de diferenças

MAT 1154 — 2008.1

Data: 17 de maio de 2008

Nome: _____ Matrícula: _____

Assinatura: _____ Turma: _____

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	2.0		
1b	2.0		
2	2.0		
3	2.0		
4a	1.0		
4b	1.0		
Total	10.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou caneta preta. Não use caneta vermelha ou verde.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Resolva os problemas de valor inicial abaixo:

(a)

$$\mathbf{y}' - A\mathbf{y} = b(t), \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 1+t \\ 4t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$y_1' = 6y_1 - y_2, \quad y_2' = 4y_1 + 2y_2, \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

2. Resolva o sistema de equações de diferenças abaixo:

$$a_{n+1} = 5a_n + 3b_n + 10, \quad b_{n+1} = 2a_n + b_n + 2, \quad a_0 = 1, \quad b_0 = 0.$$

3. Considere os seis diagramas de fase desenhados na próxima página. Cada um deles mostra as curvas $(y_1(t), y_2(t))$ onde $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ são soluções da equação $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ para alguma matriz 2×2 real A . As seis matrizes encontram-se entre as oito opções abaixo.

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

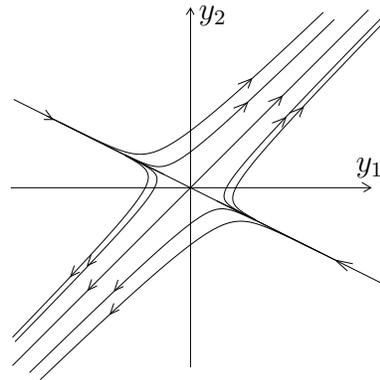
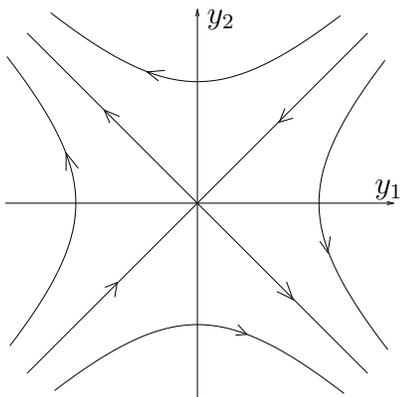
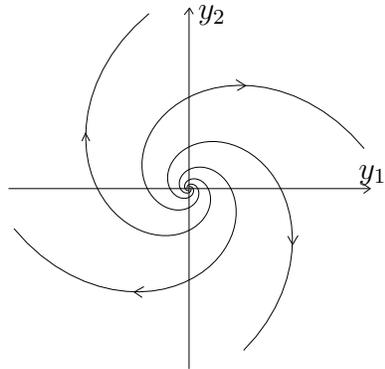
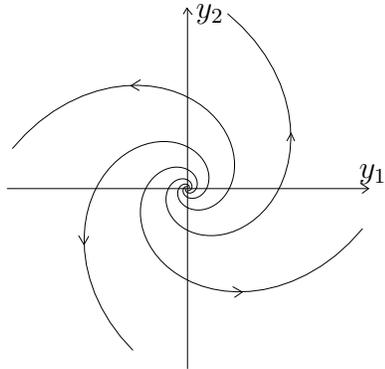
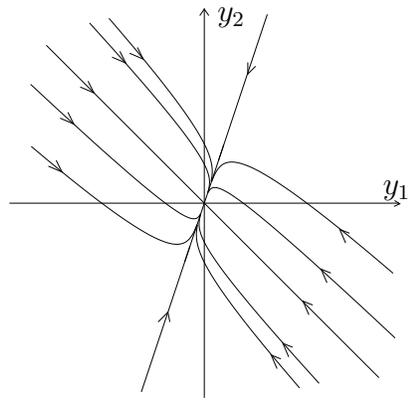
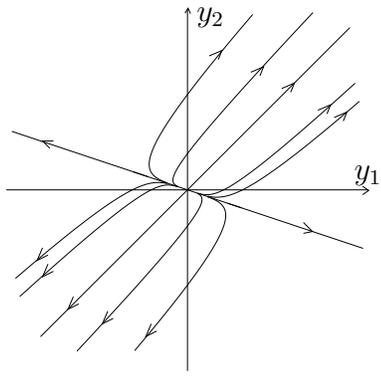
(e) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

Para cada um dos diagramas, identifique a matriz correspondente.



4. (a) Dê um exemplo de uma matriz real A_1 tal que a equação $\mathbf{y}' = A_1\mathbf{y}$ admita uma solução \mathbf{y}_1 com $\mathbf{y}_1(0) = (1, 0)$, $\mathbf{y}_1(1) = (0, 2)$, $\mathbf{y}_1(2) = (-4, 0)$. Calcule $\mathbf{y}_1(t)$ e $\mathbf{y}_1(1/2)$.

- (b) Dê um exemplo de uma *outra* matriz real A_2 tal que a equação $\mathbf{y}' = A_2\mathbf{y}$ admita uma solução \mathbf{y}_2 com $\mathbf{y}_2(0) = (1, 0)$, $\mathbf{y}_2(1) = (0, 2)$, $\mathbf{y}_2(2) = (-4, 0)$, $\mathbf{y}_2(1/2) \neq \mathbf{y}_1(1/2)$ (onde \mathbf{y}_1 é a função obtida no item anterior). Calcule $\mathbf{y}_2(t)$ e $\mathbf{y}_2(1/2)$.