P2 de Equações diferenciais e de diferenças
MAT 1154 — 2008.1
Data: 17 de maio de 2008

Nome: GABARITO ______________________ Matrícula: __________
Assinatura: ______________________ Turma: __________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	2.0		
1b	2.0		
2	2.0		
3	2.0		
4a	1.0		
4b	1.0		
Total	10.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou caneta preta.
  Não use caneta vermelha ou verde.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Resolva os problemas de valor inicial abaixo:

   (a)

$$\mathbf{y}' - A\mathbf{y} = b(t), \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 1+t \\ 4t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Solução: Os autovalores de A são $-1 \pm 6i$ donde $\exp(tA) = \alpha_t A + \beta_t I$ onde $\alpha_t(-1 \pm 6i) + \beta_t = e^{-t}(\cos(6t) \pm i \operatorname{sen}(6t))$. Assim $\alpha_t = (1/6)e^{-t} \operatorname{sen}(6t)$, $\beta_t = (1/6)e^{-t}(6\cos(6t) + \operatorname{sen}(6t))$ donde

$$\exp(tA) = \frac{e^{-t}}{6} \begin{pmatrix} 6\cos(6t) & 9\operatorname{sen}(6t) \\ -4\operatorname{sen}(6t) & 6\cos(6t) \end{pmatrix}.$$

É natural conjecturar que exista uma solução particular da forma

$$\mathbf{y}_p(t) = \begin{pmatrix} C_1 t + C_2 \\ C_3 t + C_4 \end{pmatrix}.$$

Substituindo,

$$\mathbf{y}_p'(t) - A\mathbf{y}_p(t) = \begin{pmatrix} (C_1 - 9C_3)t + (C_1 + C_2 - 9C_4) \\ (4C_1 + C_3)t + (4C_2 + C_3 + C_4) \end{pmatrix}.$$

Expandindo temos o sistema

$$\begin{aligned} C_1 \qquad & - 9C_3 \qquad &= 1 \\ C_1 + C_2 \qquad & \qquad - 9C_4 &= 1 \\ 4C_1 \qquad & + C_3 \qquad &= 4 \\ + 4C_2 & + C_3 + C_4 &= 0 \end{aligned}$$

que tem solução $C_1 = 1$, $C_2 = C_3 = C_4 = 0$. Assim a solução geral da equação é

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} t + 6C_5 e^{-t}\cos(6t) + 9C_6 e^{-t}\operatorname{sen}(6t) \\ -4C_5 e^{-t}\operatorname{sen}(6t) + 6C_6 e^{-t}\cos(6t) \end{pmatrix}.$$

Pela condição inicial temos $C_5 = 1/6$, $C_6 = 0$ donde

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} t + e^{-t}\cos(6t) \\ -(2/3)e^{-t}\operatorname{sen}(6t) \end{pmatrix}.$$

(b)

$$y_1' = 6y_1 - y_2, \quad y_2' = 4y_1 + 2y_2, \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

Solução: Seja

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

que tem autovalor duplo 4. Escreva

$$A = S + N, \quad S = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Como $SN = NS$ temos

$$\exp(tA) = \exp(tS)\exp(tN) = e^{4t} \begin{pmatrix} 1 + 2t & -t \\ 4t & 1 - 2t \end{pmatrix}.$$

Assim

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = e^{4t} \begin{pmatrix} 1 + 2t & -t \\ 4t & 1 - 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{4t} \begin{pmatrix} 1 + t \\ 1 + 2t \end{pmatrix}.$$

2. Resolva o sistema de equações de diferenças abaixo:

$$a_{n+1} = 5a_n + 3b_n + 10, \quad b_{n+1} = 2a_n + b_n + 2, \quad a_0 = 1, \quad b_0 = 0.$$

Solução: Seja
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
A matriz A tem autovalores $\lambda_1 = 3 + \sqrt{10} \approx 6.16$ e $\lambda_2 = 3 - \sqrt{10} \approx -0.16$ e autovetores $v_1 = (3, -2 + \sqrt{10})$ e $v_2 = (3, -2 - \sqrt{10})$, respectivamente. É natural conjecturar que exista uma solução particular constante $a_n = C_3$, $b_n = C_4$. Substituindo temos $C_3 = 5C_3 + 3C_4 + 10$, $C_4 = 2C_3 + C_4 + 2$ donde $C_3 = -1$, $C_4 = -2$ Assim a solução geral do sistema é

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = C_1(3 + \sqrt{10})^n \begin{pmatrix} 3 \\ -2 + \sqrt{10} \end{pmatrix} + C_2(3 - \sqrt{10})^n \begin{pmatrix} 3 \\ -2 - \sqrt{10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Em particular

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 + \sqrt{10} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 - \sqrt{10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

donde $C_1 = (2 + \sqrt{10})/6$ e $C_2 = (2 - \sqrt{10})/6$. Assim

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{(2 + \sqrt{10})(3 + \sqrt{10})^n}{6} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 + \sqrt{10} \end{pmatrix} + \\ + \frac{(2 - \sqrt{10})(3 - \sqrt{10})^n}{6} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 - \sqrt{10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

3. Considere os seis diagramas de fase desenhados na próxima página. Cada um deles mostra as curvas $(y_1(t), y_2(t))$ onde $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ são soluções da equação $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ para alguma matriz 2×2 real A. As seis matrizes encontram-se entre as oito opções abaixo.

   (a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

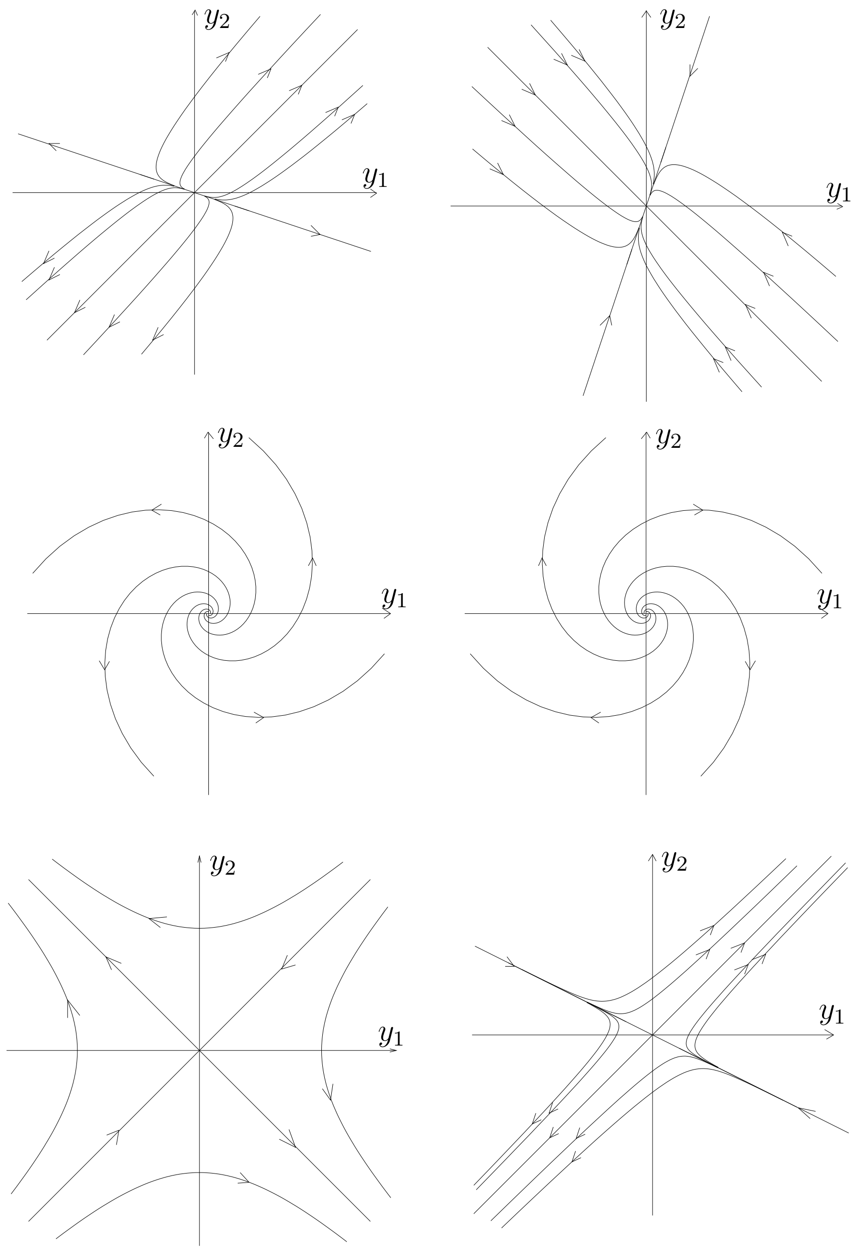
   (e) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

   (f) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

   (g) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

   (h) $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

   Para cada um dos diagramas, identifique a matriz correspondente.



Solução:

A correspondência correta é, lendo as figuras por linhas: g, h; e, c; b, f. Há muitas formas corretas de demonstrar que esta é a correspondência correta.

4. (a) Dê um exemplo de uma matriz real A_1 tal que a equação $\mathbf{y}' = A_1\mathbf{y}$ admita uma solução $\mathbf{y}_1$ com $\mathbf{y}_1(0) = (1,0)$, $\mathbf{y}_1(1) = (0,2)$, $\mathbf{y}_1(2) = (-4,0)$. Calcule $\mathbf{y}_1(t)$ e $\mathbf{y}_1(1/2)$.

Solução: Seja $M_1 = \exp(A_1)$. Devemos ter $M_1\mathbf{y}_1(0) = \mathbf{y}_1(1)$ e $M_1\mathbf{y}_1(1) = \mathbf{y}_1(2)$ donde

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de M_1, que são $\pm 2i = 2\exp(\pm(\pi/2)i)$, devem ser iguais às exponeciais dos autovalores de A_1. Uma possibilidade é que os autovalores de A_1 sejam $\ln 2 \pm (\pi/2)i$. Diagonalizando M_1 ou fazendo o cálculo funcional temos

$$A_1 = \begin{pmatrix} \ln 2 & -\pi/2 \\ \pi/2 & \ln 2 \end{pmatrix}.$$

Temos

$$\exp(tA_1) = 2^t \begin{pmatrix} \cos((\pi/2)t) & -\operatorname{sen}((\pi/2)t) \\ \operatorname{sen}((\pi/2)t) & \cos((\pi/2)t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{y}_1(t) = 2^t \begin{pmatrix} \cos((\pi/2)t) \\ \operatorname{sen}((\pi/2)t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_1(1/2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Dê um exemplo de uma *outra* matriz real A_2 tal que a equação $\mathbf{y}' = A_2\mathbf{y}$ admita uma solução $\mathbf{y}_2$ com $\mathbf{y}_2(0) = (1,0)$, $\mathbf{y}_2(1) = (0,2)$, $\mathbf{y}_2(2) = (-4,0)$, $\mathbf{y}_2(1/2) \neq \mathbf{y}_1(1/2)$ (onde $\mathbf{y}_1$ é a função obtida no item anterior). Calcule $\mathbf{y}_2(t)$ e $\mathbf{y}_2(1/2)$.

Solução: Temos $M_2 = M_1$, mas os autovalores de A_2 podem ser outros, por exemplo $\ln 2 \pm (5\pi/2)i$, que corresponde a

$$A_2 = \begin{pmatrix} \ln 2 & -5\pi/2 \\ 5\pi/2 & \ln 2 \end{pmatrix}$$

e

$$\exp(tA_2) = 2^t \begin{pmatrix} \cos((5\pi/2)t) & -\operatorname{sen}((5\pi/2)t) \\ \operatorname{sen}((5\pi/2)t) & \cos((5\pi/2)t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{y}_2(t) = 2^t \begin{pmatrix} \cos((5\pi/2)t) \\ \operatorname{sen}((5\pi/2)t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_2(1/2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$